

SPIS TREŚCI

1. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W PRĘCIE ROZCIĄGANYM (ŚCISKANYM)	6
1.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, wzory i definicje	6
1.2. Przykłady obliczeń pojedynczych prętów rozciąganych i/lub ściskanych	9
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	19
2. PŁASKIE UKŁADY PRĘTOWE STATYCZNIE WYZNACZALNE	23
2.1. Przykłady obliczeń układów prętowych statycznie wyznaczalnych	23
2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania	34
3. PŁASKIE UKŁADY PRĘTOWE STATYCZNIE NIWYZNACZALNE	38
3.1. Wprowadzenie. Metodyka rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych	38
3.2. Przykłady obliczeń układów prętowych statycznie niewyznaczalnych	39
3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	71
4. TRÓJKIERUNKOWY STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA	76
4.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia i wzory	76
4.2. Przykłady obliczeń elementów prostokątnych i walcowych	77
4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	84
5. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W CIENKOŚCIENNYCH PIERŚCIENIACH I KOŁOWYCH KRAŻKACH	86
5.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia i wzory	86
5.2. Przykłady obliczeń naprężeń i odkształceń w pierścieniach	87
5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	91
6. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH	94
6.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, definicje i wzory	94
6.2. Przykłady obliczeń momentów bezwładności figur płaskich	96
6.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	105
7. CZYSTE I TECHNOLOGICZNE ŚCINANIE	109
7.1. Czyste ścinanie	109
7.2. Ścinanie technologiczne	110
7.3. Przykłady obliczeń wytrzymałościowych na ścinanie technologiczne	111
8. ZGINANIE BELEK, RAM I ŁUKÓW	122
8.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, definicje, wzory i równania	123
8.2. Wykresy sił wewnętrznych w belkach, ramach i łukach	125

8.2.1.	Przykłady obliczeń sił wewnętrznych w belkach, ramach i łukach	125
8.2.2.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	145
8.3.	Obliczanie naprężeń w belkach, ramach i łukach	150
8.4.	Obliczanie ugięć belek	158
8.4.1.	Przykłady wyznaczania funkcji ugięcia belek jedno i wielo- przedziałowych	158
8.4.2.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	167
8.5.	Zginanie ukośne	173
9.	SKRĘCANIE PRĘTÓW	178
9.1.	Wprowadzenie	178
9.1.1.	Podstawowe wzory dla prętów skręcanych o przekroju kołowym	178
9.1.2.	Podstawowe wzory dla cienkościennych prętów skręcanych o profilu zamkniętym (wzory Bredta)	180
9.1.3.	Podstawowe wzory dla cienkościennych prętów skręcanych o profilu otwartym	181
9.2.	Pręty o przekroju kołowym	183
9.2.1.	Przykłady obliczeń	183
9.2.2.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	200
9.3.	Pręty cienkościenne o przekrojach zamkniętych lub otwartych	203
9.3.1.	Przykłady obliczeń	203
9.3.2.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	210

Słowo wstępne od autorów

Pierwsza część podręcznika jest przeznaczona dla studentów wszystkich kierunków konstrukcyjnych i technologicznych, wydziałów mechanicznych wyższych szkół technicznych.

Ze względu na pierwszy kontakt studentów z problemami wytrzymałości materiałów i konstrukcji dobierano zadania stosunkowo proste.

Omówiono metodykę i metody rozwiązywania zadań. Duży nacisk położono na precyzyjne sformułowanie treści zadań. Wiele zadań zostało rozwiązanych z bardzo szczegółowym opisem rozwiązań na przykładach liczbowych.

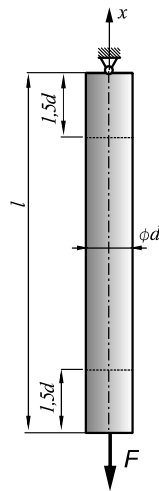
Autorzy uważają, że najprostszą drogą do nauczenia się poprawnego rozwiązywania zadań przez studentów jest samodzielne ich rozwiązywanie, dlatego zamieścili w zbiorze zadań dużą liczbę zadań do samodzielnego rozwiązania, podając końcowe wyniki rozwiązania.

Autorzy planują wydanie drugiej części zbioru zadań z wytrzymałości materiałów przeznaczonego głównie dla studentów kierunków konstrukcyjnych. Przewiduje się zamieszczenie w nim zadań bardziej złożonych, w tym zwłaszcza z wytrzymałości złożonej, belek, ram i łuków statycznie niewyznaczalnych, płyt i powłok oraz stateczności konstrukcji.

1. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W PRĘCIE ROZCIĄGANYM (ŚCISKANYM)

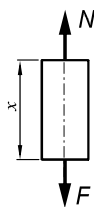
1.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, wzory i definicje

Rozpatrzmy bardzo prosty przypadek pręta o średnicy d (z ang. diameter) o długości l (length) zamocowanego przegubowo na górnym końcu i obciążonego siłą skupioną F (force) na dolnym końcu (rys. 1.1), przyłożoną w środku ciężkości przekroju poprzecznego.



Rys. 1.1

Dla uproszczenia ciężar własny pręta pominiemy. Wtedy w dowolnym przekroju poprzecznym pręta działa wewnętrzna siła normalna N (normal force) równa sile obciążającej F , co wynika z równowagi sił działających na wydzieloną część pręta, pokazanych na rys. 1.2



Rys. 1.2

Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta, w przekrojach poprzecznych pręta dostatecznie odległych od punktów przyłożenia sił skupionych (w rozpatrywanym przypadku – w przekrojach odległych o co najmniej $1,5 d$ od końców pręta) rozkład naprężeń normalnych σ (prostopadłych do przekroju poprzecznego) można przyjąć jako równomierny. Naprężenia normalne σ oblicza się wtedy ze wzoru

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

gdzie A (z ang. area) jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta. Dla pręta o przekroju kołowym

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

W wytrzymałości materiałów najczęściej stosowaną jednostką naprężenia jest megapaskal [MPa], czyli meganiuton na metr kwadratowy

$$1 \text{ MPa} = 1 \frac{MN}{m^2} = 10^6 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{N}{mm^2}.$$

Na skutek sił rozciągających działających na pręt o długości l następuje przyrost jego długości Δl . Zgodnie z prawem Hooke'a przyrost długości Δl można obliczyć ze wzoru

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}, \quad (1.2)$$

gdzie E jest modułem Younga (stałą sprężystą materiału pręta). Po wprowadzeniu oznaczenia,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.3)$$

które jest odkształceniem względnym w kierunku osi pręta, wzór (1.2) można zapisać w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (1.4)$$

Jest to liniowa zależność między odkształceniem i naprężeniem, zwana prawem Hooke'a.

W trakcie rozciągania rozpatrywanego pręta rośnie jego długość natomiast maleje jego średnica. Zmiana średnicy, w granicach stosowalności prawa Hooke'a, zależy od stałej materiałowej ν , nazywanej najczęściej liczbą lub współczynnikiem Poissona. Wielkość ta jest definiowana jako

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}, \quad (1.5)$$

gdzie $\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d}$ jest względnym odkształceniem w kierunku poprzecznym (prostopadłym do osi pręta).

Ze wzoru (1.5) wynika, że

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E}, \quad (1.6)$$

a zmiana wymiaru średnicy pręta

$$\Delta d = \varepsilon_t \cdot d = -\nu\frac{\sigma}{E}d.$$

Dla materiałów izotropowych wartość liczby Poissona zawarta jest w przedziale $0 \leq \nu \leq 0,5$. W przypadku stali przyjmuje się $\nu = 0,3$.

Warunek bezpiecznego projektowania prętów rozciąganych ze względu na wytrzymałość jest następujący

$$\sigma_{r \max} \leq \sigma_{rdop}, \quad (1.7)$$

gdzie σ_{rdop} (często oznaczane przez k_r) jest naprężeniem dopuszczalnym na rozciąganie dla danego materiału i elementu konstrukcji.

Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie jest definiowane jako

$$\sigma_{rdop} = k_r = \frac{R_e}{n_1} = \frac{R_m}{n_2}, \quad (1.8)$$

gdzie: R_e – granica plastyczności materiału pręta,

R_m – wytrzymałość na rozciąganie,

n_1, n_2 – współczynniki bezpieczeństwa (liczby większe od jednościi zależne od wielu czynników).

Wielkości R_e, R_m są wyznaczane w laboratoriach zgodnie z odpowiednimi Normami. Podane wzory (1.1)÷(1.8) są słuszne dla pryzmatycznych (o stałym przekroju poprzecznym) prętów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego.

W prętach ściskanych wewnętrzna siła normalna N jest ujemna. Przy założeniu, że pręt ściskany nie ulegnie wyboczeniu (nie przejdzie do innej niż prostoliniowa postaci równowagi), można przy analizie jego naprężeń i odkształceń stosować wzory (1.1)÷(1.6), natomiast wzory (1.7) i (1.8) przyjmują postać

$$|\sigma_c|_{\max} \leq \sigma_{cdop},$$

$$\sigma_{cdop} = k_c = \frac{R_e}{n_1} = \frac{R_c}{n_2}, \quad (1.9)$$

gdzie: R_e – granica plastyczności materiału pręta przy ścisaniu,
 R_c – wytrzymałość materiału pręta na ściskanie,
 n_1, n_2 – współczynniki bezpieczeństwa ($n_1 > 1, n_2 > 1$),
 $\sigma_{cdop} = k_c$ – naprężenia dopuszczalne na ściskanie.

Dla prętów poddanych obciążeniu ciągłemu q równoległemu do osi pręta (w płaszczyźnie pionowej np. ciężarowi własnemu) siła normalna N , naprężenie σ , odkształcenie ε i przemieszczenie u są funkcją współrzędnej x , określającej położenie rozpatrywanego przekroju poprzecznego.

W tym przypadku odkształcenia względne $\varepsilon(x)$ i przemieszczenia $u(x)$ przekrojów związane są zależnością

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (1.10)$$

W prętach siła normalna N jest siłą wewnętrzną prostopadłą do przekroju poprzecznego pręta. Aby obliczyć siłę normalną N w dowolnym przekroju pręta, należy dla „odciętej myślowo” części pręta napisać sumę rzutów sił na oś pręta. W sumie rzutów sił uwzględniamy siłę N oraz wszystkie siły zewnętrzne (czynne i bierne) działające po jednej stronie rozpatrywanego przekroju. Siła normalna jest dodatnia, gdy jej zwrot jest na zewnątrz rozpatrywanego przekroju, czyli gdy pręt w rozpatrywanym przekroju jest rozciągany (rys. 1.2).

1.2. Przykłady obliczeń pojedynczych prętów rozciąganych i/lub ściskanych

Zadanie 1.1. Pręt stalowy o module sprężystości, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, długości $l = 1 \text{ m}$ i polu powierzchni przekroju poprzecznego $A = 10^{-4} \text{ m}^2$ jest rozciągany siłą $F = 10 \text{ kN}$. Obliczyć wartość naprężeń σ działających w płaszczyźnie, odkształcenie względne ε pręta oraz przyrost długości Δl . Ciężar własny pręta pominąć.

R o z w i ą z a n i e. Siła normalna N w rozpatrywanym płaszczyźnie ma stałą wartość we wszystkich przekrojach i wynosi

$$N = F = 10 \text{ kN} = 10^{-2} \text{ MN}.$$

Naprężenie normalne

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{10^{-2} \text{ MN}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 100 \text{ MPa}.$$

Odkształcenie względne

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{100 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Przyrost długości pręta

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \text{ m} = 0,5 \text{ mm}.$$

Należy zwrócić uwagę, że przy stosunkowo dużych naprężeniach ($\sigma = 100 \text{ MPa}$) odkształcenia pręta stalowego są bardzo małe.

Przyrost długości Δl stanowi zaledwie 0,05% długości początkowej pręta. Okaże się to bardzo istotne przy określaniu przemieszczeń węzłów kratownic lub układów prętowych.

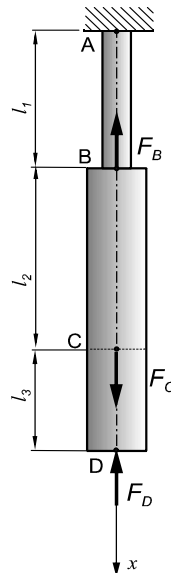
Zadanie 1.2. Pręt o skokowo zmiennym polu powierzchni przekroju poprzecznego jest zamocowany na górnym końcu i obciążony jak pokazano na rys. 1.3. Narysować wykresy sił normalnych N i naprężeń normalnych σ oraz obliczyć zmianę długości pręta Δl . Ciężar własny pręta pominąć. Przyjąć, że części ściskanej pręta wyboczenie nie zagraża.

Dane:

$$l_1 = 2a, l_2 = 3a, l_3 = a = 0,2 \text{ m}; A_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, A_2 = A_3 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$$

$$F_B = 10 \text{ kN}, F_C = 80 \text{ kN}, F_D = 20 \text{ kN};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$



Rys. 1.3

Rozwiązanie. Pręt trzeba podzielić na trzy przedziały. Granice przedziałów to: początek pręta, zmiana pola powierzchni przekroju poprzecznego, punkt przyłożenia siły oraz koniec pręta. Rozpatrywany pręt jest prętem trójprzedziałowym, a granicami przedziałów są przekroje A, B, C, D . Przyjmijmy początek osi x w punkcie A i skierujmy ją do dołu wzdłuż osi pręta. Reakcję R_A oblicza się z sumy rzutów na oś x wszystkich sił działających na cały pręt (rys. 1.4).

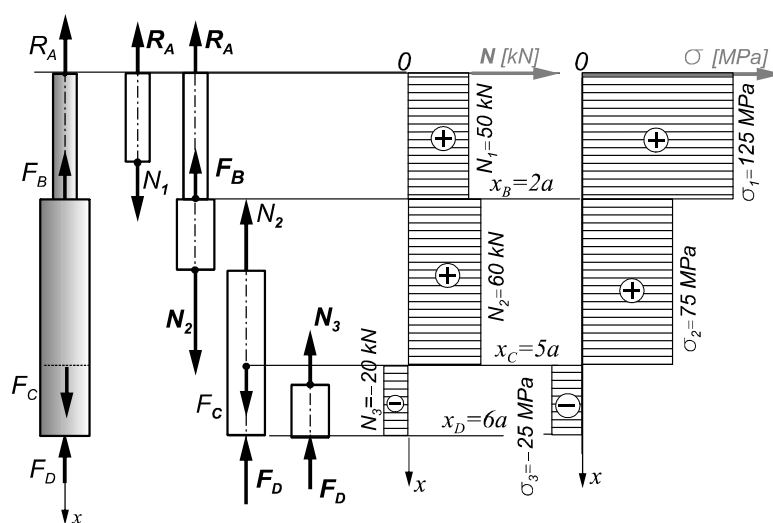
$$\sum F_x \Rightarrow -R_A - F_B + F_C - F_D = 0,$$

$$R_A = -F_B + F_C - F_D.$$

Po podstawieniu danych otrzymano

$$R_A = 50 \text{ kN}.$$

Na rysunku 1.4 pokazano części pręta odcięte przekrojami w przedziałach pierwszym ($0 \leq x \leq 2a$), drugim ($2a \leq x \leq 5a$) i trzecim ($5a \leq x \leq 6a$) oraz wykresy sił normalnych N i naprężeń normalnych σ .



Rys. 1.4

Zwroty sił normalnych N_1, N_2, N_3 należy rysować zawsze od przekroju, tzn. zakładać dodatnie wartości sił normalnych. Z definicji sił normalnych wynika, że:

$$N_1 = R_A = 50 \text{ kN} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2a;$$

$$N_2 = R_A + F_B = 60 \text{ kN} \quad \text{dla} \quad 2a \leq x \leq 5a;$$

$$N_3 = -F_D = -20 \text{ kN} \quad \text{dla} \quad 5a \leq x \leq 6a.$$

Ujemna wartość siły N_3 oznacza, że pręt w przedziale trzecim jest ściskany.

Naprężenia normalne obliczone zgodnie ze wzorem (1.1) wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50 \text{ kN}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ MN}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 125 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 75 \text{ MPa}$$

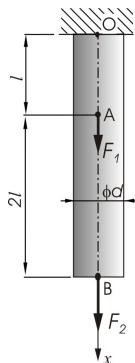
$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -25 \text{ MPa}.$$

Zmianę długości całego pręta oblicza się jako sumę zmiany długości jego przedziałów (aby można korzystać ze wzoru (1.2) wielkości N_i i A_i muszą być wielkościami stałymi)

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{EA_3} = \frac{N_1 \cdot 2a}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot 3a}{EA_2} + \frac{N_3 \cdot a}{EA_2} = \\ &= \frac{2\sigma_1 a}{E} + \frac{3\sigma_2 a}{E} + \frac{\sigma_3 a}{E} = 0,250 \text{ mm} + 0,225 \text{ mm} - 0,025 \text{ mm} = 0,45 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Wartość $\Delta l > 0$ oznacza, że pręt jako całość wydłużył się (pierwsze dwa przedziały pręta wydłużyły się, a trzeci uległ skróceniu o $0,025 \text{ mm}$).

Zadanie 1.3. Obliczyć najmniejszą średnicę pręta, obciążonego jak pokazano na rys. 1.5, aby zapewnić bezpieczną jego pracę ze względu na wytrzymałość materiału. Ciężar własny pręta pominąć. Dane liczbowe: $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 50 \text{ kN}$, $\sigma_{rdop} = 150 \text{ MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$. Po obliczeniu i przyjęciu wymiaru średnicy obliczyć jej zmianę spowodowaną obciążeniem pręta.



Rys. 1.5

R o z w i ą z a n i e. Przy stałej średnicy pręta maksymalne naprężenie rozciągające występuje w przedziale, w którym działa maksymalna siła normalna. W rozpatrywanym pręcie maksymalna siła normalna N_{\max} działa w przedziale $0 \leq x \leq l$ i wynosi

$$N_{\max} = F_1 + F_2 = 70 \text{ kN}.$$

Maksymalne naprężenia rozciągające

$$\sigma_{r\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{4N_{\max}}{\pi d^2}.$$

Z warunku (1.7) otrzymano

$$\frac{4N_{\max}}{\pi d^2} \leq \sigma_{rdop},$$

a zatem

$$d \geq \sqrt{\frac{4N_{\max}}{\pi \sigma_{rdop}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 70 \cdot 10^{-3} \text{ MN}}{\pi \cdot 150 \text{ MPa}}} = 0,0244 \text{ m}.$$

Przyjęto pręt o średnicy $d = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$, gdyż pręty o takiej średnicy produkowane są przez huty. Dla pręta o takiej średnicy naprężenia rozciągające wynoszą:
w przedziale $0 \leq x \leq l$

$$\sigma_{r\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{4N_{\max}}{\pi d^2} = \frac{4(F_1 + F_2)}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 70 \cdot 10^{-3} \text{ MN}}{\pi \cdot (0,025 \text{ m})^2} = 142,6 \text{ MPa};$$

w przedziale $l \leq x \leq 3l$

$$\sigma_{rz} = \frac{N_2}{A} = \frac{4F_2}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ MN}}{\pi (0,025 \text{ m})^2} = 101,9 \text{ MPa}$$

i są mniejsze od naprężenia dopuszczalnego na rozciąganie $\sigma_{rdop} = 150 \text{ MPa}$. Zmianę średnicy Δd można w rozpatrywanych przedziałach pręta obliczyć ze wzoru (1.6)

$$\Delta d = \varepsilon_t \cdot d = -\nu \frac{\sigma}{E} \cdot d,$$

a zatem w rozpatrywanych przedziałach

$$\Delta d_1 = -0,3 \frac{142,6 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} \cdot 0,025 \text{ m} = -0,53 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cong -0,0053 \text{ mm},$$

$$\Delta d_2 = -0,3 \frac{101,9 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} \cdot 0,025 \text{ m} = -0,38 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cong -0,0038 \text{ mm}.$$

Jak widać, zmiana (zmniejszenie) średnicy pręta jest tak mała, że trzeba użyć bardzo precyzyjnych przyrządów pomiarowych, aby ją zmierzyć.