

Spis treści

I Geometria	10
1 Prosta	11
1.1 Prosta a oś liczbowa	11
1.2 Wektory	12
1.3 Odcinki	13
2 Płaszczyzna	14
2.1 Wiadomości wstępne	14
2.2 Układ współrzędnych	15
2.3 Wektory	18
2.4 Równania prostej	23
2.4.1 Równanie ogólne prostej	23
2.4.2 Równanie kierunkowe prostej	25
2.4.3 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty	27
2.4.4 Równanie odcinkowe	27
2.4.5 Równanie parametryczne	28
2.5 Stożkowe właściwe	30
2.5.1 Ogólna definicja stożkowej właściwej	30
2.5.2 Parabola	31
2.5.3 Elipsa	32
2.5.4 Hiperbola	34
3 Przestrzeń trójwymiarowa	37
3.1 Układ współrzędnych	37

3.2	Wektory	40
3.2.1	Iloczyn skalarny wektorów	42
3.2.2	Iloczyn wektorowy	43
3.2.3	Iloczyn mieszany	45
3.3	Równania płaszczyzny	45
3.3.1	Równanie ogólne płaszczyzny	45
3.3.2	Równanie płaszczyzny	47
3.3.3	Równanie parametryczne płaszczyzny	48
3.3.4	Równanie odcinkowe	49
3.4	Prosta w przestrzeni	49
3.4.1	Równanie parametryczne prostej	49
3.4.2	Równanie prostej jako przecięcie dwóch płaszczyzn	50
3.5	Przykłady powierzchni	51
3.5.1	Powierzchnie walcowe	51
3.5.2	Powierzchnie stożkowe	53
3.5.3	Powierzchnie obrotowe	54
3.5.4	Powierzchnie nieobrotowe	56
II	Algebra	59
4	Struktury algebraiczne	60
4.1	Struktury algebraiczne	60
4.2	Półgrupy	63
4.3	Grupy	65
4.3.1	Podstawowe własności i przykłady	65
4.3.2	Podgrupy	68
4.3.3	Homomorfizmy	69
4.3.4	Grupy cykliczne	70
4.3.5	Grupy symetryczne	73
4.4	Pierścienie, ciała	75
4.5	Przestrzenie liniowe	82

5	Liczby zespolone	85
5.1	Ciało liczb zespolonych	85
5.2	Postać kanoniczna liczby zespolonej	86
5.3	Postać trygonometryczna liczby zespolonej	88
5.4	Pierwiastkowanie liczb zespolonych	91
6	Pierścienie	93
6.1	Pierścień liczb całkowitych	93
6.2	Pierścień reszt modulo m	94
6.3	Pierścień wielomianów	95
6.3.1	Działania na wielomianach	95
6.3.2	Podzielność wielomianów	97
6.3.3	Pierwiastki wielomianu	99
7	Przestrzenie liniowe	103
7.1	Określenie przestrzeni liniowej	103
7.2	Podstawowe własności przestrzeni liniowych	104
7.3	Podprzestrzenie liniowe	106
7.4	Liniowa zależność układu wektorów	109
7.5	Baza i wymiar przestrzeni liniowej	112
7.6	Przekształcenia liniowe	116
8	Macierze, układy równań liniowych	120
8.1	Macierze	120
8.2	Układy równań liniowych	130
8.3	Rozwiązywanie układów równań	132
9	Przekształcenia liniowe	140
9.1	Definicja i podstawowe własności	140
9.2	Macierz przekształcenia liniowego	143
9.3	Mnożenie macierzy	145
9.4	Algorytm odwracania macierzy	151
9.5	Zmiana baz	158
9.6	Algebry	166

10 Wyznaczniki	170
10.1 Definicja wyznacznika	170
10.2 Permutacje. Pełne rozwinięcie wyznacznika	178
10.3 Przykłady obliczania wyznaczników	180
10.4 Wzory Cramera	185
11 Przestrzenie ilorazowe	192
11.1 Warstwy	192
11.2 Przestrzenie ilorazowe	193
11.3 Struktura zbioru rozwiązań układu	194
12 Wartości i wektory własne	199
12.1 Podprzestrzenie niezmiennicze	199
12.2 Wektory i wartości własne	200
12.3 Wielomian charakterystyczny	201
12.4 Własności wartości i wektorów własnych	206
13 Funkcjonały liniowe i dwuliniowe	210
13.1 Funkcjonały (formy) liniowe	210
13.2 Przestrzeń dualna	212
13.3 Funkcjonały dwuliniowe	214
13.4 Formy kwadratowe	218
13.5 Rzeczywiste formy kwadratowe	225
14 Przestrzenie euklidesowe	230
14.1 Przestrzenie euklidesowe	230
14.2 Ortogonalizacja Grama-Schmidta	237
14.3 Bazy ortonormalne i macierze ortogonalne	241
14.4 Endomorfizmy ortogonalne	244
14.5 Endomorfizmy symetryczne	246
14.6 Wyznacznik Grama	248

15 Przestrzenie unitarne	250
15.1 Formy hermitowskie	250
15.2 Bazy ortonormalne i macierze unitarne	256
15.3 Endomorfizmy hermitowskie	258
15.4 Endomorfizmy unitarne	262
16 Przestrzenie afiniczne	264
16.1 Podstawowe własności	264
16.2 Układ współrzędnych	267
17 Skorowidz rzeczowy	269
18 Skorowidz symboli	277

Wstęp

Na rynku podręczników znajduje się wiele tekstów dotyczących algebry liniowej i geometrii, jednak z uwagi na nowe standardy odnoszące się do algebry liniowej na kierunkach *Informatyka* i *fizyka* warto dostosować treści i sposób wykładu do tych kierunków studiów. Z tego powodu postanowiliśmy napisać jeden podręcznik do algebry i geometrii. W I części znajdują się podstawowe zagadnienia geometrii analitycznej w przestrzeniach jedno-, dwu- i trójwymiarowej. W II części zawarliśmy podstawowe zagadnienia z algebry, nie tylko liniowej, gdyż niektóre hasła ze standardów nauczania występują zwykle w rozdziałach algebry abstrakcyjnej.

Ostatnio przyjęta przez MEN podstawa programowa bardzo mocno zmniejszyła zakres treści programowych wymaganych w liceum. Uczniowie mogą nie poznać nawet podstawowych zagadnień geometrii analitycznej. Z tego powodu w pierwszej części naszego podręcznika przypominamy te tematy mimo, że z punktu widzenia matematyki wyższej, powinny się znaleźć dopiero po wszystkich zagadnieniach algebry liniowej, w szczególności po przestrzeniach euklidesowych, a dokładniej w rozdziale o przestrzeniach afinicznych.

Od Czytelników wymagamy jedynie podstawowych wiadomości o zbiorach i funkcjach. Oczywiście zakładamy, że nasi Czytelnicy znają podstawowe działy matematyki, omawiane w szkole średniej, posiadają umiejętności rachunkowe i umiejętną rozwiązywać równania.

W naszym podręczniku będziemy stosowali następujące oznaczenia:

\mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych dodatnich,

\mathbb{N}_0 – zbiór liczb naturalnych (wraz z zerem),

\mathbb{Z} – zbiór liczb całkowitych,
 \mathbb{Q} – zbiór liczb wymiernych,
 \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych,
 \mathbb{R}_+ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

Warto przypomnieć sobie kształty liter alfabetu łacińskiego (bez znaków diakrytycznych) zapisane krojem gotyckim:

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$.

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$.

Wielokrotnie będziemy wykorzystywali litery alfabetu greckiego. Przypomnijmy też i ten alfabet.

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon

H	η	eta
Θ	θ	teta
Λ	λ	lambda
Ξ	ξ	ksi
Π	π	pi

P	ρ, ϱ	ro
Σ	σ, ς	sigma
Φ	ϕ, φ	fi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Niniejsza książka powstała po wielu latach wykładania tego przedmiotu w różnych konfiguracjach; można znaleźć wpływ wielu znanych podręczników z algebry liniowej, między innymi: *Algebry* Bolesława Gleichgewichta, *Algebry Wyższej* Zdzisława Opiala i *Finite Dimensional Vector Spaces* Paula Halmosa.

Podręcznik nie zawiera dowodów wszystkich twierdzeń — umieściliśmy w nim wybrane dowody, aby pokazać metody dowodzenia oraz ich różnorodność. Czytelnik, który chciałby poznać inne dowody i nieco inne ujęcie tematu, jest proszony o sięgnięcie do literatury podanej na końcu książki.

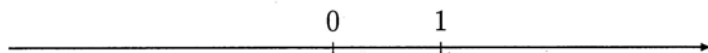
Część I
GEOMETRIA

Rozdział 1

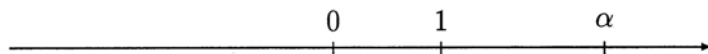
Prosta

1.1 Prosta a oś liczbowa

Na linii prostej l (poziomej) wybieramy dwa punkty; jeden z nich oznaczamy jako O i utożsamiamy z liczbą 0 , drugi na prawo od pierwszego. Ten drugi punkt utożsamiamy z liczbą 1 . Punkt O nazywamy *początkiem osi liczbowej*. Każdy punkt utożsamiamy z liczbą rzeczywistą zgodnie z uporządkowaniem — liczbie mniejszej od drugiej odpowiada punkt leżący na lewo od punktu odpowiadającego tej drugiej liczbie. Tę prostą z zaznaczonym początkiem, oznaczanym liczbą 0 i punktem 1 nazywamy *osią liczbową*.



Liczbę, odpowiadającą danemu punktowi nazywamy *współrzędną* tego punktu. Każdej liczbie odpowiada więc punkt na osi liczbowej i odwrotnie, każdemu punktowi na prostej odpowiada liczba rzeczywista. Zapisujemy np. $A = (\alpha)$ lub krócej $A = \alpha$.



1.2 Wektory

Wektorem \overrightarrow{AB} na osi l nazywamy uporządkowaną parę punktów A i B . Wektorowi temu przypisujemy jego współrzędną, czyli różnicę liczb, odpowiadających punktom B i A .

Współrzędną takiego wektora oznaczamy jako $[a]$.

Dwa wektory nazywamy *równymi* (*równoważnymi*), jeśli ich współrzędne są równe.

Wektorem swobodnym nazywamy zbiór wszystkich wektorów równoważnych. Ponieważ cechą wspólną wektorów równoważnych jest równość ich współrzędnych, więc mają one wspólne cechy; są nimi:

- długość wektora (czyli wartość bezwzględna współrzędnej wektora),
- zwrot wektora (czyli znak współrzędnej wektora).

Dla wektorów \vec{a} i \vec{b} o współrzędnych odpowiednio α i β , sumą wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy wektor o współrzędnej $[\alpha + \beta]$.

Dla wektora \vec{a} o współrzędnej α i liczby γ , iloczynem wektora \vec{a} i liczby γ nazywamy wektor o współrzędnej $[\gamma \cdot \alpha]$.

Określone powyżej działania na wektorach spełniają następujące warunki:

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

$$(3) \exists_{\vec{\theta}} \forall_{\vec{a}} (\vec{\theta} + \vec{a} = \vec{a}),$$

$$(4) \forall_{\vec{a}} \exists_{\vec{a}'} (\vec{a} + \vec{a}' = \vec{\theta}),$$

$$(5) \lambda (\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) + (\lambda \vec{b}),$$

$$(6) (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = (\lambda_1 \vec{a}) + (\lambda_2 \vec{a}),$$

$$(7) (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a} = (\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a})),$$

dla każdych wektorów \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} oraz liczb rzeczywistych λ , λ_1 i λ_2 .

1.3 Odcinki

Odcinkiem o końcach A i B nazywamy zbiór wszystkich punktów leżących między tymi punktami łącznie z tymi punktami. Jeśli $A = (\alpha)$, $B = (\beta)$, to punkt X leży na odcinku AB wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba t z przedziału $[0, 1]$ taka, że współrzędna ξ punktu C spełnia równość

$$\xi = t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta.$$

Środkiem odcinka AB jest punkt, którego współrzędna ξ_0 spełnia równość

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta.$$

Odcinkowi o końcach A i B , mających współrzędne α i β odpowiada więc przedział $[\alpha, \beta]$. Dlatego często odcinki są mylone z przedziałami liczbowymi.

