Spis treści

Wstęp

Na rynku podręczników znajduje się wiele tekstów dotyczących algebry liniowej i geometrii, jednak z uwagi na nowe standardy odnoszące się do algebry liniowej na kierunkach *Informatyka* i *fizyka* warto dostosować treści i sposób wykładu do tych kierunków studiów. Z tego powodu postanowiliśmy napisać jeden podręcznik do algebry i geometrii. W I części znajdują się podstawowe zagadnienia geometrii analitycznej w przestrzeniach jedno-, dwu- i trójwymiarowej. W II części zawarliśmy podstawowe zagadnienia z algebry, nie tylko liniowej, gdyż niektóre hasła ze standardów nauczania występują zwykle w rozdziałach algebry abstrakcyjnej.

Ostatnio przyjęta przez MEN podstawa programowa bardzo mocno zmniejszyła zakres treści programowych wymaganych w liceum. Uczniowie mogą nie poznać nawet podstawowych zagadnień geometrii analitycznej. Z tego powodu w pierwszej części naszego podręcznika przypominamy te tematy mimo, że z punktu widzenia matematyki wyższej, powinny się znaleźć dopiero po wszystkich zagadnieniach algebry liniowej, w szczególności po przestrzeniach euklidesowych, a dokładniej w rozdziale o przestrzeniach afinicznych.

Od Czytelników wymagamy jedynie podstawowych wiadomości o zbiorach i funkcjach. Oczywiście zakładamy, że nasi Czytelnicy znają podstawowe działy matematyki, omawiane w szkole średniej, posiadają umiejętności rachunkowe i umieją rozwiązywać równania.

W naszym podręczniku będziemy stosowali następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich,

$\mathbb{N}_0$ – zbiór liczb naturalnych (wraz z zerem),

$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

Warto przypomnieć sobie kształty liter alfabetu łacińskiego (bez znaków diakrytycznych) zapisane krojem gotyckim:

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Wielokrotnie będziemy wykorzystywali litery alfabetu greckiego. Przypomnijmy też i ten alfabet.

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon

H	η	eta
Θ	θ	teta
Λ	λ	lambda
Ξ	ξ	ksi
Π	π	pi

P	ρ, ϱ	ro
Σ	σ, ς	sigma
Φ	ϕ, φ	fi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Niniejsza książka powstała po wielu latach wykładania tego przedmiotu w różnych konfiguracjach; można znaleźć wpływ wielu znanych podręczników z algebry liniowej, między innymi: *Algebry* Bolesława Gleichgewichta, *Algebry Wyższej* Zdzisława Opiala i *Finite Dimensional Vector Spaces* Paula Halmosa.

Podręcznik nie zawiera dowodów wszystkich twierdzeń — umieściliśmy w nim wybrane dowody, aby pokazać metody dowodzenia oraz ich różnorodność. Czytelnik, który chciałby poznać inne dowody i nieco inne ujęcie tematu, jest proszony o sięgnięcie do literatury podanej na końcu książki.

Część I

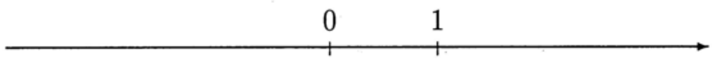
GEOMETRIA

Rozdział 1

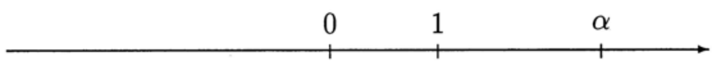
Prosta

1.1 Prosta a oś liczbowa

Na linii prostej l (poziomej) wybieramy dwa punkty; jeden z nich oznaczamy jako O i utożsamiamy z liczbą 0, drugi na prawo od pierwszego. Ten drugi punkt utożsamiamy z liczbą 1. Punkt O nazywamy *początkiem osi liczbowej*. Każdy punkt utożsamiamy z liczbą rzeczywistą zgodnie z uporządkowaniem — liczbie mniejszej od drugiej odpowiada punkt leżący na lewo od punktu odpowiadającego tej drugiej liczbie. Tę prostą z zaznaczonym początkiem, oznaczanym liczbą 0 i punktem 1 nazywamy *osią liczbową*.



Liczbę, odpowiadającą danemu punktowi nazywamy *współrzędną* tego punktu. Każdej liczbie odpowiada więc punkt na osi liczbowej i odwrotnie, każdemu punktowi na prostej odpowiada liczba rzeczywista. Zapisujemy np. $A = (\alpha)$ lub krócej $A = \alpha$.



1.2 Wektory

Wektorem $\overrightarrow{AB}$ na osi l nazywamy uporządkowaną parę punktów A i B. Wektorowi temu przypisujemy jego współrzędną, czyli różnicę liczb, odpowiadających punktom B i A.

Współrzędną takiego wektora oznaczamy jako $[a]$.

Dwa wektory nazywamy *równymi* (*równoważnymi*), jeśli ich współrzędne są równe.

Wektorem swobodnym nazywamy zbiór wszystkich wektorów równoważnych. Ponieważ cechą wspólną wektorów równoważnych jest równość ich współrzędnych, więc mają one wspólne cechy; są nimi:

- długość wektora (czyli wartość bezwzględna współrzędnej wektora),
- zwrot wektora (czyli znak współrzędnej wektora).

Dla wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o współrzędnych odpowiednio α i β, sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor o współrzędnej $[\alpha + \beta]$.

Dla wektora $\vec{a}$ o współrzędnej α i liczby γ, iloczynem wektora $\vec{a}$ i liczby γ nazywamy wektor o współrzędnej $[\gamma \cdot \alpha]$.

Określone powyżej działania na wektorach spełniają następujące warunki:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

(3) $\exists_{\vec{\theta}} \forall_{\vec{a}} \left(\vec{\theta} + \vec{a} = \vec{a}\right)$,

(4) $\forall_{\vec{a}} \exists_{\vec{a'}} \left(\vec{a} + \vec{a'} = \vec{\theta}\right)$,

(5) $\lambda \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = (\lambda \vec{a}) + \left(\lambda \vec{b}\right)$,

(6) $(\lambda_1 + \lambda_2)\, \vec{a} = (\lambda_1 \vec{a}) + (\lambda_2 \vec{a})$,

(7) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a} = (\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}))$,

dla każdych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ oraz liczb rzeczywistych λ, λ_1 i λ_2.

1.3 Odcinki

Odcinkiem o końcach A i B nazywamy zbiór wszystkich punktów leżących między tymi punktami łącznie z tymi punktami. Jeśli $A = (\alpha)$, $B = (\beta)$, to punkt X leży na odcinku AB wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba t z przedziału $[0, 1]$ taka, że współrzędna ξ punktu C spełnia równość

$$\xi = t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta.$$

Środkiem odcinka AB jest punkt, którego współrzędna ξ_0 spełnia równość

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta.$$

Odcinkowi o końcach A i B, mających współrzędne α i β odpowiada więc przedział $[\alpha, \beta]$. Dlatego często odcinki są mylone z przedziałami liczbowymi.