SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Niniejsza książka stanowi rozszerzenie i modyfikację podręczników pt. „Mechanika” i „Mechanika techniczna” mojego autorstwa wydanych przez WNT, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, Warszawa, w latach 2007 i 2009.

Prowadzone na bazie wspomnianych podręczników wykłady i ćwiczenia na Wydziale Mechanicznym na kierunkach Mechatronika i Transport oraz na studiach doktoranckich z Mechaniki wpłynęły na wychwycenie niektórych nieścisłości i wprowadzenie stosownych poprawek do tekstu tej książki.

Wprowadzenie kilku zupełnie nowych rozdziałów i znaczne modyfikacje już istniejących spowodowało ukierunkowanie tej książki na studentów, doktorantów i pracowników naukowych wyższych uczelni technicznych.

Podręcznik/monografia pt. „Mechanika techniczna i teoretyczna. Dynamika” może być traktowany jako druga część książki pt. „Mechanika techniczna i teoretyczna. Statyka i kinematyka”, wydanej również przez Wydawnictwo PŁ.

Obydwie te pozycje o charakterze podręcznika i monografii mają stanowić kompendium wiedzy dotyczącej mechaniki klasycznej z uwypukleniem jej nowych gałęzi rozwoju, co w zamierzeniu powinno ożywić mechanikę i wzmocnić zainteresowanie nią wśród szerokiej rzeszy Czytelników, a w tym głównie inżynierów. W książkach skoncentrowano się na prezentacji szerokiego wachlarza prostych i złożonych problemów w ujęciu wektorowym i przestrzeganiu jednolitego matematycznie zorientowanego podejścia do opisu i wyjaśnienia wielu nawet złożonych i często zupełnie nowych działów mechaniki klasycznej. Stanowią one wyraz konsekwentnego dążenia autora do połączenia mechaniki technicznej zorientowanej inżyniersko z mechaniką klasyczną wykładaną na wydziałach fizyki i matematyki stosowanej.

Ponadto w obydwu książkach starałem się zawrzeć krótkie opisy charakteryzujące wielkie postacie matematyki i mechaniki, których nazwiska pojawiają się w tekście. Celem takiego podejścia było uwypuklenie rysów historycznych rozwoju mechaniki i wskazanie na istotną rolę jej drugiego (oprócz formalnego matematycznego) humanistycznego oblicza.

Wprowadzenie do wykorzystywanego w tej książce rachunku wektorowego i macierzowego można znaleźć we wspomnianej już pozycji pt. „Mechanika techniczna i teoretyczna. Statyka i kinematyka".

Rozdział 1 obejmuje proste zagadnienia dynamiki. W p. 1.1 opisano dynamikę punktu, a w tym II prawo Newtona i ruch punktu materialnego pod działaniem sił prostych. Przeprowadzono również klasyfikację problemów dynamiki oraz sformułowano i zilustrowano prawa zmienności pędu i zachowania wielkości kinematycznych punktu. W p. 1.2 opisano podobne prawa odniesione do układów materialnych, a w p. 1.3 pt. „Ruch punktu materialnego w polu środkowym", wprowadzone rozważania teoretyczne uzupełniono wieloma przykładami.

Rozdział 2 ilustruje rozwiązanie równań ruchu i zastosowanie praw zachowania opisanych w rozdziałach poprzednich, wykorzystując przykład wahadeł matematycznego i fizycznego. Interpretacje dynamiki punktu materialnego na przykładzie wahadeł wykraczają poza tradycyjne klasyczne ujęcia dotyczące tej problematyki. Rozdział ten „otwiera również drzwi" do analizy dynamiki chaotycznej punktu materialnego. Dodatkowo rozdział ten zawiera p. 2.3 dotyczący modelowania i analizy dynamiki wahadła fizycznego potrójnego w płaszczyźnie. Najpierw wyprowadzono równania ruchu wahadła, opierając się na równaniach Lagrange'a, a następnie dokonano ich symulacji numerycznej. Pokazano kilka przykładów dynamiki regularnej (okresowej i quasi-okresowej) oraz chaotycznej analizowanego wahadła potrójnego. Ponadto wyznaczono reakcje dynamiczne w przegubach wahadła oraz podano kilka przykładowych ich przebiegów w przypadku ruchu wahadła regularnego i chaotycznego.

W rozdziale 3 opisano zagadnienia dynamiki i statyki we współrzędnych uogólnionych. W p. 3.1 wiele uwagi poświęcono więzom i współrzędnym uogólnionym z uwypukleniem roli i znaczenia więzów nieholonomicznych oraz tzw. zagadnienia zamrożenia więzów. W celu zrozumienia opisanej w nim problematyki autor uzupełnił rozważania teoretyczne o cztery przykłady. Podrozdział 3.2 jest zupełnie nowy i dotyczy zasad Jourdaina i Gaussa, a przedstawione w nim rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami. Również p. 3.3 dotyczący zagadnień stateczności położeń równowagi jest zupełnie nowym zilustrowanym szeregiem poglądowych przykładów. W kolejnym p. 3.4 wyprowadzono równania Lagrange'a II i I rodzaju, a rozważania teoretyczne zostały zilustrowane pięcioma przykładami. W p. 3.5 podano własności równań Lagrange'a. Całkom pierwszym układów Lagrange'a poświęcono p. 3.6; wprowadzono w nim m.in. pojęcie współrzędnych cyklicznych, a ich znaczenie zilustrowano poprzez prosty przykład. Następnie w p. 3.7 zostało wyprowadzone równanie Routha oraz znacznie szerzej opisano rolę i znaczenie współrzędnych cyklicznych w p. 3.8. Z kolei p. 3.9 obejmuje kinetykę układu trzech ciał sztywnych na przykładzie manipulatora o trzech stopniach swobody. Opierając się na wcześniejszych rozdziałach, wyprowadzono równania ruchu manipulatora, a następnie dokonano analizy jego ruchu wykorzystując symulacje numeryczne.

Klasycznym równaniom dynamiki poświęcono rozdział 4. W p. 4.1, po wprowadzeniu tzw. zmiennych Hamiltona i przekształcenia Legendre'a, wyprowadzono postać kanonicznych równań Hamiltona. Następnie sformułowano i udowodniono twierdzenie Jacobiego-Poissona. Ponadto opisano przekształcenia kanoniczne prowadzące do bezpośredniego otrzymania tzw. całek pierwszych rozpatrywanych zagadnień. Wprowadzono (i niekiedy udowodniono) wiele twierdzeń dotyczących kanoniczności przekształceń. Na koniec pokrótce zilustrowano metodę Jacobiego oraz wskazano na zalety wprowadzenia równań Jacobiego-Hamiltona. Korzyści płynące z wprowadzenia tzw. dekompozycji Bogomolnego oraz transformacji Bäcklunda wykorzystywanych podczas rozwiązywania równań Eulera-Lagrange'a opisano w p. 4.2. Podejście to rozszerza możliwości metod analitycznych do analizy niektórych silnie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. W p. 4.3 wyprowadzono równania Whittakera, w p. 4.4 równania Vorontsa i równania Chaplygina, a w p. 4.5 równania Appella. Przeanalizowano zalety i wady wyprowadzonych równań, a opisaną problematykę zilustrowano przykładami.

Rozdział 5 został poświęcony klasycznej teorii uderzenia. Najpierw wprowadzono podstawowe pojęcia związane z tą problematyką, a w tym określono zjawiska uderzenia, siły zderzeniowej i impulsu uderzenia. Następnie sformułowano podstawowe prawa teorii uderzenia. Ponadto w p. 5.3 opisano zagadnienie uderzenia punktu materialnego o przegrodę, a następnie (p. 5.4) dokonano fizycznej interpretacji uderzenia. Podrozdział 5.5 zawiera opis i ilustrację wraz z przykładem zjawiska zderzenia dwóch kul poruszających się ruchem postępowym. Na koniec tego rozdziału opisano zderzenie dwóch ciał sztywnych swobodnych oraz zdefiniowano środek uderzenia.

Rozdział 6 dotyczy pewnych zagadnień teorii drgań układów mechanicznych dyskretnych. Na początku wprowadzono zapis macierzowy drgań liniowych układów o wielu stopniach swobody oraz dokonano klasyfikacji sił mechanicznych. Następnie opisano małe drgania układów liniowych, fragmentami liniowych i nieliniowych o jednym stopniu swobody. Rozdział ten zawiera wiele przykładów, opis zastosowania metody funkcji zmiennej zespolonej oraz dokonano w nim analizy prostych układów dynamicznych poddanych wymuszeniu impulsowemu.

Rozdział 7 wprowadza Czytelnika w problematykę ruchu planet, w szczególności opisano tutaj szczegółowo zagadnienie dynamiki dwóch punktów materialnych w polu sił grawitacyjnych.

Rozdział 8 poświęcono dynamice układów o zmiennej masie. Opisano matematycznie zmiany ilości ruchu i momentu kinetycznego i wyprowadzono równania ruchu punktu materialnego w układzie o zmiennej masie, tzw. równanie Mieszczerskiego. Następnie opisano i zilustrowano tzw. dwa zagadnienia Ciołkowskiego. W p. 8.5 wyprowadzono równanie ruchu ciała o zmiennej masie. Na końcu rozdziału podano dwa przykłady związane z wcześniej przeprowadzonymi rozważaniami.

Rozdział 9 obejmuje dynamikę ciała sztywnego i dynamikę układów połączonych takich ciał. Jest to tematyka raczej pomijana w klasycznych podręcznikach i monografiach dotyczących dynamiki i wymaga od Czytelnika dobrego przygotowania matematycznego. Obejmuje on problematykę obrotu ciała sztywnego wokół osi nieruchomej i wokół punktu nieruchomego, przypadek Kowalewskiej, ruch ogólny swobodny ciała sztywnego, ruch kuli jednorodnej po płaszczyźnie poziomej w polu ciężkości z tarciem oraz dynamikę (drgania) układów ciał sztywnych połączonych poprzez przeguby Cardana-Hooke'a (Cardana) i drgania zachowawcze bryły sztywnej podpartej sprężyście w polu grawitacyjnym.

Rozdział 10 został poświęcony analizie ruchów stacjonarnych ciała sztywnego i zbadaniu ich stabilności. W szczególności rozpatrzono w nim dynamikę stacjonarną i niestacjonarną, a następnie po określeniu zbiorów niezmienniczych układów zachowawczych zbadano ich stabilność.

Rozdział 11 jest poświęcony geometrycznemu podejściu do dynamiki układów hamiltonowskich i zawiera podstawowe wiadomości z zakresu geometrodynamiki. Na początku wyjaśniono związek pomiędzy geometrią przestrzeni Riemanna a dynamiką. Następnie wyprowadzono podstawowe równanie geometrodynamiki, tzw. równanie Jacobi-Levi-Civita (JLC), a potem przeanalizowano przestrzeń konfiguracyjną wraz z metryką Jacobiego. Na koniec przedstawiono przykład geometryzacji prostego układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody.

Wyrażam głębokie podziękowanie dr. Krzysztofowi Januszkiewiczowi za bardzo rzetelne sprawdzenie tekstu tej książki i wychwycenie wielu uchybień i pomyłek. Dziękuję również mgr. Markowi Kaźmierczakowi za pomoc przy składaniu tekstu i wiele uwag krytycznych prowadzących w efekcie do poprawy przekazu treści tej książki.

Autor

Rozdział 1

DYNAMIKA PUNKTU, UKŁADU MATERIALNEGO I RUCH KULISTY CIAŁA SZTYWNEGO

1.1. DYNAMIKA PUNKTU

1.1.1. Drugie prawo Newtona

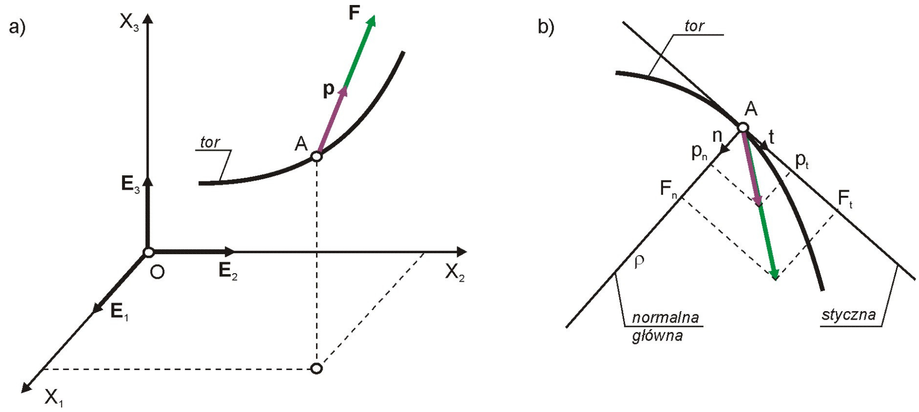
Powróćmy do rozdziału 1. książki [1], gdzie podane były prawa Newtona. Drugie z nich formułuje związek pomiędzy przyspieszeniem ruchu punktu materialnego a siłą działającą na ten punkt. Okazuje się jednak, że tylko w niektórych przypadkach siła **F** działająca na punkt materialny jest siłą niezależną od parametrów kinematycznych ruchu tego punktu.

W ogólnym przypadku drugie prawo Newtona przyjmuje postać

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \tag{1.1}$$

co podkreśla, że siła zależy zarówno od położenia punktu materialnego zdefiniowanego przez promień wektor, jak również od prędkości ruchu tego punktu (a czasem nawet od przyspieszenia [2], czego jednak nie będziemy rozważać w tej książce) i od czasu. Równanie (1.1) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu nieliniowym.

Na rys. 1.1a przedstawiono ruch swobodny punktu materialnego oraz wektory siły i przyspieszenia. Z kolei na rys. 1.1b przedstawiono rozkład przyspieszenia i sił działających na punkt materialny we współrzędnych naturalnych.



Rys. 1.1. Ruch punktu materialnego we współrzędnych prostokątnych (a) i we współrzędnych naturalnych (b)

Obierając współrzędne kartezjańskie i rzutując wektory występujące w równaniu (1.1) na osie układu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \\ m\ddot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

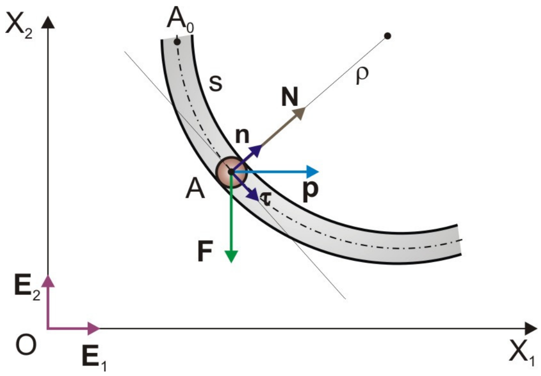
Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami i na podstawie rys. 1.1b przyspieszenie i siłę we współrzędnych naturalnych możemy rozłożyć na składowe normalną i styczną, czyli

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_t\mathbf{t} + F_n\mathbf{n}, \\ \mathbf{p} &= p_t\mathbf{t} + p_n\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

i zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_t, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Rozpatrzmy dynamikę punktu materialnego poruszającego się po zadanej nieruchomej krzywej płaskiej (rys. 1.2).



Rys. 1.2. Ruch punktu materialnego w płaszczyźnie OX_1X_2 po zadanej krzywej płaskiej

W tym przypadku ruch punktu nie jest swobodny, można go zilustrować poprzez ruch kulki (bez oporów ruchu) wzdłuż wygiętej rurki. Niech krzywa, po której porusza się punkt materialny, będzie opisana równaniem $f(x_1, x_2) = 0$ w układzie współrzędnych OX_1X_2. Równanie ruchu w postaci wektorowej ma postać

$$m\mathbf{p} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \tag{1.5}$$

Po zrzutowaniu wektorów na osie współrzędnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1} + N\cos(\mathbf{N}, \mathbf{E}_1), \\ m\ddot{x}_2 &= F_{x_2} + N\cos(\mathbf{N}, \mathbf{E}_2). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Siła **N** posiada kierunek normalnej do zadanej krzywej i kosinusy kierunkowe są określone poprzez wzory znane z geometrii różniczkowej:

$$\cos(\mathbf{N}, \mathbf{F}_i) = \frac{1}{f^*}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad f^* = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}. \tag{1.7}$$

Równania (1.6) po uwzględnieniu (1.7) przyjmą postać

$$m\ddot{x}_i = F_{x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

gdzie $\lambda = N / f^*$. W równaniach tych niewiadomymi są λ, $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ (trzecim równaniem jest równanie więzów $f(x_1, x_2) = 0$). Po rozwiązaniu tego układu równań algebraicznych-różniczkowych możemy wyznaczyć trzy poszukiwane wielkości, a następnie siłę normalną $N = \lambda f^*$.

Wektory w równaniu (1.5) możemy również rzutować na osie układu naturalnego (τ, n), przy czym zwrot $\boldsymbol{\tau}$ jest zgodny ze zwrotem poruszającej się kulki, poczynając od jej położenia początkowego A_0. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} mp\cos(\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}) &= F_t, \\ mp\cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}) &= F_n + N, \end{aligned} \tag{1.9}$$

gdzie F_t i F_n są rzutami siły **F** na kierunek styczny i normalny.

Ponieważ

$$\begin{aligned} p\cos(\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{d^2 s}{dt^2}, \\ p\cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}) &= \frac{v^2}{\rho}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

to po uwzględnieniu (1.10) w (1.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} m\frac{d^2 s}{dt^2} &= F_t, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Powyższe równania noszą nazwę *równań Eulera* ruchu nieswobodnego punktu materialnego.

Całkując pierwsze z równań (1.11) przy założeniu, że $F_t = \text{const}$, mamy

$$m\frac{ds}{dt} = F_t t + C_2, \qquad ms(t) = \frac{F_t t^2}{2} + C_2 t + C_1. \tag{1.12}$$

Niech $v(0) = v_0$, $s(0) = 0$, to $C_1 = 0$, $C_2 = mv_0$ i wobec tego $v(t) = \frac{F_t}{m} t + v_0$. Z drugiego równania (1.11) wyznaczamy $N = N(t)$. Z podanego przykładu zastosowania współrzędnych naturalnych widać, że poprzez odpowiedni wybór współrzędnych możemy rozwiązywanie zagadnienia znacznie uprościć lub skomplikować, ze względu na opisujący je model matematyczny.

Można dokonać następującej klasyfikacji sił:

(i) **F** = const. Jako przykład takiej siły może służyć siła ciężkości czy siła tarcia. Zauważmy, że obie siły są stałe „w przybliżeniu". W pierwszym przypadku ruch powinien odbywać się w pobliżu Ziemi, a w drugim tarcie może zależeć od wielu parametrów i w wielu przypadkach nie może być traktowane jako stałe ([3], [4]).

(ii) **F** = **F**(t). Siła zależy od czasu, przy czym zależność ta ma różną postać. W przypadku drgań układów dyskretnych najczęściej zależność ta jest funkcją harmoniczną, okresową lub quasi-okresową [4], a w przypadku drgań układów ciągłych, takich jak belki, płyty czy powłoki, zależność siły od czasu jest często przyjmowana w postaci wymuszeń skokowych, prostokątnych, trójkątnych lub impulsowych [3]. Innym przykładem może być siła przyciągania w polu magnetycznym, bowiem zależy ona od natężenia pola, które może ulegać zmianie w czasie.

(iii) **F** = **F**(**r**). Zależność siły od położenia w przypadku przyciągania punktów materialnych o masach m_1 i m_2 można wyrazić relacją $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, gdzie: r jest odległością między tymi punktami, a G jest stałą. Z podobnym przypadkiem mamy do czynienia wtedy, gdy do punktu materialnego dołączymy sprężynę (o masie pomijalnej), której sztywność – czyli zależność siły od przemieszczenia, będzie funkcją nieliniową.

(iv) **F** = **F**(**v**). Z tym przypadkiem mamy do czynienia, gdy punkt materialny porusza się w ośrodku ciekłym lub gazowym. Zależność ta najczęściej opisuje tłumienie i jest albo liniowa (tłumienie wiskotyczne), albo nieliniowa i proporcjonalna do v^2, ale może mieć również wartość liniową ujemną i wtedy prowadzi do samowzbudzenia ruchu punktu [4].

Należy zauważyć, że w rzeczywistych układach mechanicznych możliwe jest występowanie kombinacji wyżej wymienionych sił.

Oprócz współrzędnych prostokątnych do opisu dynamiki punktu materialnego mogą być użyte współrzędne krzywoliniowe. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami (patrz [1] – rozdz. 4.6) równania ruchu przyjmują postać:

(i) we współrzędnych walcowych

$$\begin{aligned} &m\left(\ddot{r}-r\dot{\Theta}^2\right)=F_r\,, \\ &m\left(r\ddot{\Theta}+2\dot{r}\dot{\Theta}\right)=F_\Theta, \\ &m\ddot{z}=F_z, \end{aligned} \tag{1.13}$$

gdzie $\mathbf{F}=F_r\mathbf{e}_r+F_\Theta\mathbf{e}_\Theta+F_z\mathbf{E}_3$;

(ii) we współrzędnych kulistych

$$\begin{aligned} &m\left(\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\Theta}^2\sin^2\phi\right)=F_R, \\ &m\left(R\ddot{\phi}+2\dot{R}\dot{\phi}-R\dot{\Theta}^2\sin\phi\cos\phi\right)=F_\phi, \\ &m\left(R\ddot{\Theta}\sin\phi+2\dot{R}\dot{\Theta}\sin\phi+2R\dot{\Theta}\dot{\phi}\cos\phi\right)=F_\Theta, \end{aligned} \tag{1.14}$$

gdzie $\mathbf{F}=F_R\mathbf{e}_R+F_\phi\mathbf{e}_\phi+F_\Theta\mathbf{e}_\Theta$;

(iii) we współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie

$$\begin{aligned} &m\left(\ddot{r}-r\dot{\Theta}^2\right)=F_r\,, \\ &m\left(r\ddot{\Theta}+2\dot{r}\dot{\Theta}\right)=F_\Theta, \end{aligned} \tag{1.15}$$

przy czym powyższe równanie otrzymano z równania (1.13) po przyjęciu z = const.