

SPIS TREŚCI

	str.
PRZEDMOWA	10
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	12
1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE	16
1.1. Przedmiot, podział i podstawowe zagadnienia mechaniki płynów.....	16
1.1.1. Ośrodek ciągły, element płynu.....	18
1.1.2. Podstawowe zagadnienia mechaniki płynów.....	18
1.2. Siły działające w płynach.....	19
1.2.1. Siły powierzchniowe, tensor naprężeń.....	20
1.2.2. Wypadkowa sił powierzchniowych działająca na element płynu.....	24
1.3. Własności płynów.....	26
1.3.1. Parametry i własności termodynamiczne płynów....	26
1.3.2. Własności dyssypatywne płynów.....	28
2. STATYKA CIECZY	32
2.1. Równowaga bezwzględna cieczy.....	32
2.1.1. Równania i warunki równowagi cieczy.....	32
2.1.2. Równowaga cieczy w ziemskim polu grawitacyj- nym.....	34
2.2. Parcie cieczy na powierzchnie płaskie i zakrzywione.....	36
2.2.1. Powierzchnie płaskie.....	36
2.2.2. Powierzchnie zakrzywione.....	40
2.2.3. Parcie cieczy na ciała zanurzone – wypór.....	44
2.3. Równowaga względna cieczy.....	46
2.3.1. Postępowy ruch naczynia.....	46
2.3.2. Ruch obrotowy naczynia – wirówki.....	48
3. KINEMATYKA PŁYNÓW	51
3.1. Metody analizy ruchu płynów.....	51

3.2.	Tor elementu płynu i linia prądu.....	53
3.3.	Pochodna substancjalna, przyspieszenie elementu płynu.....	55
3.4.	Strumienie płynu, źródłowe i bezźródłowe pola prędkości, funkcja prądu.....	57
	3.4.1. Strumień objętości i strumień masy płynu.....	57
	3.4.2. Kinematyczna interpretacja dywergencji wektora prędkości.....	59
	3.4.3. Funkcja prądu w polu bezźródłowym.....	61
3.5.	Wirowe i bezwirowe (potencjalne) pola prędkości.....	62
	3.5.1. Wirowe pola prędkości – cyrkulacja.....	62
	3.5.2. Bezwirowe pola prędkości – potencjał prędkości.....	65
3.6.	Kinematyka płaskich przepływów potencjalnych cieczy.....	67
	3.6.1. Zależności podstawowe dla płaskich przepływów potencjalnych.....	67
	3.6.2. Przepływy elementarne.....	70
	3.6.3. Potencjalny opływ profilu kołowego.....	75
	3.6.4. Wykorzystanie kinematyki opływu okręgu w aerodynamice profili lotniczych.....	78
3.7.	Ruch lokalny płynu, prędkość deformacji elementu płynu....	79
4.	PODSTAWOWE RÓWNANIA MECHANIKI PŁYNÓW.....	86
4.1.	Równanie zachowania masy – ciągłości przepływu.....	86
	4.1.1. Ogólne sformułowania całkowite i różniczkowe.....	86
	4.1.2. Przykłady zastosowania bilansowej formy równania ciągłości.....	89
4.2.	Równania zachowania pędu i krętu.....	92
	4.2.1. Równania pędu i krętu w formie całkowitej (bilansowej).....	92
	4.2.2. Równania zachowania pędu w ruchu ustalonym – strumień pędu.....	94
	4.2.3. Równania zachowania pędu w formie różniczkowej	96
4.3.	Zasada zachowania energii.....	98
	4.3.1. Równanie Bernoulliego.....	98
	4.3.2. Ogólne sformułowanie zasady zachowania energii...	101
	4.3.3. Równanie zachowania energii dla płynu nielepkiego bez wymiany ciepła.....	105

4.3.4.	Równanie zachowania energii ze strumieniami konwekcyjnymi przez część powierzchni otaczającej obszar o zmiennej objętości.....	107
5.	DYNAMIKA LEPKICH PŁYNÓW NEWTONOWSKICH...	110
5.1.	Zależność naprężeń od prędkości odkształceń elementu płynu.....	110
5.2.	Równanie Naviera-Stokesa.....	114
5.3.	Równanie zachowania energii dla płynu newtonowskiego...	116
5.4.	Zachowawcza (dywergentna) forma równań dynamiki płynów.....	118
6.	PODOBIENSTWO ZJAWISK PRZEPLYWOWYCH.....	122
6.1.	Główne twierdzenie o podobieństwie zjawisk.....	123
6.2.	Kryteria podobieństwa przepływów.....	128
6.3.	Analiza wymiarowa.....	131
6.3.1.	Przykłady zastosowania analizy wymiarowej.....	133
7.	PRZEPLYWY LAMINARNE I TURBULENTNE.....	138
7.1.	Stateczność ruchu płynów lepkich.....	138
7.1.1.	Doświadczenia Reynoldsa.....	140
7.2.	Przykłady elementarnych przepływów laminarnych.....	142
7.2.1.	Przepływ Couette'a.....	142
7.2.2.	Przepływ laminarny w rurze kołowej.....	144
7.3.	Przepływy turbulentne.....	146
7.3.1.	Średnio – ustalone przepływy turbulentne.....	147
7.3.2.	Reynoldsowskie uśrednione równania N-S, tensor naprężeń turbulentnych.....	149
7.3.3.	Koncepcja lepkości turbulentnej.....	152
7.3.4.	Uśrednione równania energii.....	155
8.	WARSTWA PRZYŚCIENNA.....	161
8.1.	Uproszczenie równań N-S dla warstwy przyściennej – równania Prandtla.....	162
8.1.1.	Bilansowe charakterystyki warstwy przyściennej – związek całkowity Karmana.....	166
8.1.2.	Oderwanie warstwy przyściennej.....	169
8.2.	Laminarna warstwa przyścienna.....	172
8.2.1.	Rozwiązania przepływu w warstwie laminarnej na płaskiej płytce – metoda Pohlhausena.....	175

8.3.	Turbulentna warstwa przyściennea.....	178
8.3.1.	Równania turbulentnej warstwy przyściennej.....	178
8.3.2.	Struktura turbulentnej warstwy przyściennej.....	180
8.3.3.	Proste jednoparametrowe rozwiązanie dla turbulentnej warstwy przyściennej na płaskiej płytce.....	186
8.3.4.	Turbulentny przepływ przez rurę o przekroju kołowym.....	189
8.3.5.	Półempiryczne równanie Bernoulliego.....	192
8.4.	Przepływy wtórne.....	193
9.	MODELOWANIE TURBULENCJI.....	197
9.1.	Modelowanie oparte o koncepcję lepkości turbulentnej.....	197
9.1.1.	Modele algebraiczne – zerorównaniowe.....	199
9.1.2.	Modele dwurównaniowe.....	203
9.2.	Modele naprężeń Reynoldsa.....	205
9.3.	Metoda Symulacji Dużych Wirów (LES).....	207
9.3.1.	Sposób filtracji równań N-S.....	209
9.3.2.	Modelowanie naprężeń podsiatkowych.....	213
9.4.	Modele turbulencji stosowane w różnych rodzajach przepływów średnio-ustalonych.....	215
10.	ELEMENTY DYNAMIKI GAZÓW.....	216
10.1.	Wiadomości podstawowe.....	216
10.1.1.	Przepływy pod- i naddźwiękowe, czoła fal dźwiękowych – charakterystyki.....	219
10.1.2.	Zmiany gęstości gazu płynącego z prędkościami pod- i naddźwiękowymi.....	223
10.2.	Podstawowe związki między parametrami gazu w przepływie izentropowym.....	224
10.2.1.	Parametry całkowite i krytyczne płynącego gazu... ..	225
10.2.2.	Maksymalna prędkość gazu.....	228
10.3.	Fale uderzeniowe.....	229
10.3.1.	Prostopadła fala uderzeniowa.....	231
10.3.2.	Skośna fala uderzeniowa.....	235
10.4.	Jednowymiarowy, ustalony przepływ gazu przez kanały.....	240
10.4.1.	Dysza de Laval.....	241
10.4.2.	Dysza (konfuzor) poddźwiękowa.....	245

11. WYPADKOWE SIŁY DYNAMICZNEGO DZIAŁANIA PŁYNU NA POWIERZCHNIE OPŁYWANYCH CIAŁ ORAZ NA ŚCIANKI KANAŁÓW	249
11.1. Siły działające na opływane ciała.....	249
11.1.1. Siła nośna płata lotniczego – twierdzenie Kuty- Żukowskiego.....	254
11.1.2. Siły nośne działające na wirujące cylindry i kule – efekt Magnusa.....	256
11.1.3. Siły oporu opływanych ciał.....	258
11.2. Reakcje wywierane przez płyn na ścianki kanałów.....	263
11.3. Dynamiczne działanie strug swobodnych na powierzchni płaskie i zakrzywione.....	266
11.3.1. Działanie strug na powierzchni nieruchome.....	266
11.3.2. Działanie strug na powierzchni ruchome.....	269
11.4. Siła ciągu rakiet i silników odrzutowych.....	271
11.5. Wykorzystanie równania krętu do wyprowadzenia podsta- wowego równania promieniowych maszyn przepływowych	273
12. WPROWADZENIE DO METOD DYSKRETYZACJI RÓWNAŃ DYNAMIKI PŁYNÓW	276
12.1. Przegląd stosowanych metod dyskretyzacji równań.....	277
12.2. Metoda różnic skończonych, zbieżność i stabilność sche- matów różnicowych.....	279
12.2.1. Różnice skończone stosowane w równaniach dy- namiki płynów, różnice kompaktowe.....	279
12.2.2. Zbieżność i stabilność schematów różnicowych....	284
12.2.3. Ogólna metoda badania stabilności schematów różnicowych dla równań liniowych.....	289
12.2.4. Schematy ADI, stabilność schematów konwekcji i dyfuzji, i schematy „pod prąd”.....	292
12.3. Metoda elementarnych objętości kontrolnych.....	300
12.3.1. Ogólne sformułowanie metody.....	300
12.3.2. Przykłady nieliniowego zagadnienia – jednowy- miarowa dyfuzja i konwekcja.....	303
12.3.3. Dwuwymiarowa stacjonarna konwekcja i dyfuzja	308
12.3.4. Dowolne, nieortogonalne siatki w metodzie ele- mentarnych objętości.....	310

12.4. Wpływ numerycznej dyfuzji na wyniki obliczeń.....	312
12.5. Metody spektralne.....	314
12.6. Metoda rozwiązywania układów równań liniowych z trójdagonalną macierzą TDMA.....	318
13. METODY KOMPUTEROWE SYMULACJI RUCHU GAZÓW NIELEPKICH Z FALAMI UDERZENIOWYMI.....	321
13.1. Sformułowanie zagadnienia.....	322
13.1.1. Sformułowanie zagadnienia w formie bilansowej	322
13.1.2. Sformułowanie zagadnienia w formie różniczkowej	323
13.1.3. Silne nieciągłości parametrów gazu, warunki Rankine'a-Hugoniota.....	324
13.1.4. Uwagi o warunkach brzegowych.....	325
13.2. Popularne schematy numeryczne dla niestacjonarnego, adiabatycznego przepływu gazu z falami uderzeniowymi...	327
13.2.1. Schematy: Laxa-Wendroffa, Cranka-Nicolsona, MacCormacka.....	327
13.2.2. Stabilizacja rozwiązań z silnymi nieciągłościami przez wprowadzenie sztucznej lepkości.....	331
13.3. Schematy TVD.....	335
13.4. Przykłady komputerowych symulacji opływów z falami uderzeniowymi.....	340
14. ALGORYTMY KOMPUTEROWYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ NAVIERA-STOKESA.....	343
14.1. Sformułowanie zagadnienia.....	343
14.2. Rozwiązywanie równań N-S dla przepływów ściśliwych...	345
14.2.1. Jawna metoda MacCormacka.....	346
14.2.2. Schematy Cranka-Nicolsona.....	348
14.2.3. Schematy Runge'go-Kutty.....	351
14.3. Rozwiązywanie równań N-S dla przepływów nieściśliwych	353
14.3.1. Metoda sztucznej ściśliwości.....	354
14.3.2. Metody korekcji ciśnienia.....	356
14.3.3. Przykład algorytmu korekcji ciśnienia.....	360
14.4. Uwagi o obliczeniach równoległych w komputerowych symulacjach przepływów.....	372
14.5. Przykłady symulacji przepływów uzyskane przy wykorzystaniu omówionych metod.....	375
14.6. Przykłady symulacji rzeczywistych przepływów wirowych	379

15. PODSTAWOWE RÓWNANIA I SIATKI OBLICZENIOWE W KRZYWOLINIOWYCH UKŁADACH WSPÓLRZĘDNYCH.....	381
15.1. Zależności geometryczne dla dowolnych krzywoliniowych układów współrzędnych.....	382
15.2. Równania podstawowe w nieortogonalnym, krzywoliniowym układzie współrzędnych.....	388
15.2.1. Równanie ciągłości.....	388
15.2.2. Równanie Naviera-Stokesa.....	389
15.2.3. Równanie energii.....	392
15.3. Równania podstawowe w ortogonalnych układach współrzędnych.....	393
15.3.1. Równanie ciągłości.....	394
15.3.2. Równanie Naviera-Stokesa.....	394
15.3.3. Równanie energii.....	396
15.3.4. Równania podstawowe w cylindrycznym układzie współrzędnych.....	397
15.4. Generowanie siatek obliczeniowych.....	401
15.4.1. Generowanie płaskich, ortogonalnych siatek obliczeniowych.....	402
15.4.2. Metoda algebraiczna generowania trójwymiarowej siatki obliczeniowej dla kanału wirnika sprężarki przepływowej.....	404
15.4.3. Ogólna technika generowania siatek obliczeniowych dla przestrzennych kanałów.....	411
15.5. Dekompozycja obszaru i obliczenia równoległe.....	420
LITERATURA.....	425
SKOROWIDZ NAZWISK.....	428

PRZEDMOWA

Podręcznik ten został napisany w końcu 2003 roku. Mechanika Płynów, która jest jego treścią zmieniła się radykalnie w ciągu ostatniego dziesięciolecia. Nie zmieniły się oczywiście jej zasady i podstawowe równania, ale nieomal rewolucyjnie zmieniły się możliwości ich rozwiązywania. Stało się to za sprawą ogromnego postępu w technice obliczeń komputerowych. Budzi to zrozumiały entuzjazm wśród zwolenników komputerowych symulacji ruchu cieczy i gazów, którzy korzystają z dość szeroko dostępnych programów pozwalających na symulację złożonych trójwymiarowych, turbulentnych przepływów.

Współczesny podręcznik nie może się zatem ograniczyć do wykładu podstaw mechaniki płynów, jej zasad i równań włączając w to nawet modele turbulencji na różnych poziomach złożoności (rozdziały 1 ÷ 11). Podręcznik ten musi podać podstawy metod numerycznych rozwiązywania równań mechaniki płynów i ich komputerowych realizacji (rozdziały 12 ÷ 15). Rozdziały poświęcone temu tematowi są konieczne nie tylko ze względu na wyłożenie podstaw metod obliczeń komputerowych, ale w niemiernie ważnym stopniu ze względu na wykazanie ich ograniczeń i niedokładności. Wyjaśnienie tych ostatnich jest niezwykle ważne dlatego, aby użytkownicy programów komputerowych nie podchodzili bezkrytycznie do otrzymanych rezultatów. Edukacja związana ze skomplikowaną techniką obliczeń numerycznych oraz ich niedoskonałością jest równie ważna jak zachęcenie do ich szerokiego stosowania.

Prezentowany podręcznik umożliwia kształcenie na wielu poziomach, począwszy od prostych tzw. hydraulicznych ujęć zagadnień mechaniki płynów. Ten model wymaga wybrania prostych wariantów równań dla przepływów nielepkich i ich jednowymiarowych reprezentacji. Następnie należy skorzystać z podanych półempirycznych współczynników strat ciśnienia

aby uwzględnić zjawiska zachodzące w jednowymiarowych przepływach płynów rzeczywistych (lepkich).

Statyka cieczy (rozdział 2) została umieszczona w podręczniku z myślą o tym, że jest to wprawdzie elementarne wprowadzenie do mechaniki płynów, ale niezbędne w podstawowym wykształceniu inżyniera.

Treść rozdziałów 3, 4, 5, 7, 9 wykracza nieco ponad podstawowy poziom nauczania studentów i w tym zakresie podręcznik może być pomocny dla wykładów na studiach doktoranckich i dla kształcenia młodych nauczycieli akademickich. Rozdziały 6, 8, 10 i 11 nie wykraczają poza programy politechniczne na studiach magisterskich.

Pośrednie poziomy, pomiędzy elementarnymi, a najwyższymi mogą być bez trudu wybrane przez prowadzącego przedmiot w zależności od realizowanego programu.

Na kilku kierunkach studiów, między innymi na Energetyce są obecnie wprowadzone przedmioty dotyczące metod komputerowych symulacji przepływów cieczy i gazów. Materiał do nauczania w tym zakresie znajduje się w rozdziałach od 12-go do 15-go. Rozdziały te zostały również napisane z myślą o doksztalcaniu użytkowników programów komputerowych (obecnie najpopularniejsze to CFX-5 i FLUENT). Wiedza przedstawiona w tych rozdziałach pozwoli im na świadome korzystanie z programów i krytyczną ocenę otrzymywanych wyników, ale również wprowadzenie do nich własnych podprogramów, bo takie możliwości są w nich przewidziane.

Podręcznik nie zawiera przykładów obliczeniowych, opisu przyrządów pomiarowych i metod eksperymentalnych. Zadania te są spełniane przez zbiór ćwiczeń audytoryjnych [19] oraz wprowadzenia i instrukcje ćwiczeń laboratoryjnych [11].

Dziękuję za merytoryczne i formalne poprawki dokonane przez dr Marka Rabięę, mgr inż. Krzysztofa Sobczaka oraz za wielokrotne przepisywanie całości materiału przez Mariolę Pustkowską.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- A – pole powierzchni
 A_i^j – macierz składowych trzech wektorów bazy podstawowej \vec{B}_i
 A_j^i – macierz składowych trzech wektorów bazy wzajemnej \vec{B}^j
 A_{n+1}, A_n – amplitudy oscylacji w następnym i poprzednim kroku czasowym
 a – prędkość dźwięku, przyspieszenie
 a_* – krytyczna prędkość gazu
 \vec{B}_i, \vec{B}^j – wektory bazy podstawowej i wzajemnej krzywoliniowych układów współrzędnych dla $i, j = 1, 2, 3$
 $C_{e,w,\dots}, D_{e,w,\dots}, A_{E,W,\dots}$ – współczynniki konwekcji, dyfuzji i sumaryczne w metodzie elementarnych objętości kontrolnych
 c_p, c_v – ciepła właściwe przy stałym ciśnieniu i objętości
 c_x, c_y – współczynnik oporu i współczynnik siły nośnej
 Ds – funkcja dyssypacji
 \det – moduł tensora
 $\frac{d}{dt}$ – symbol pochodnej substancjalnej
 Eu – liczba Eulera
 \vec{F} – siła
 F_y – siła nośna
 F_x – siła oporu
 \vec{F}_m – jednostkowa siła masowa
 Fr – liczba Frouda
 f_t – współczynniki tarcia (oporu) przepływu w rurociągu kołowym

G	– ciężar
g	– przyspieszenie ziemskie
g^{ij}, g_{ij}	– składowe tensorów metrycznych wzajemnego i podstawowego
h_i	– współczynniki Lamego (podające długości wektorów bazowych w układach ortogonalnych)
\mathbf{I}	– tensor jednostkowy
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	– wektory jednostkowe (wersory) układu kartezjańskiego
$\left\{ \begin{matrix} j \\ i \ k \end{matrix} \right\}$	– christofflany
i	– entalpia
i_c	– entalpia całkowita
\mathfrak{J}	– Jakobian transformacji układów współrzędnych x^i oraz x^j (krzywoliniowego i kartezjańskiego)
$k = \frac{q^2}{2} = \frac{\overline{v'_i v'_i}}{2}$	– energia kinetyczna pulsacji turbulentnych
Ma	– liczba Macha
\dot{m}	– strumień masy
\dot{m}_*	– krytyczny strumień masy
Nu	– liczba Nusselta
\vec{n}	– normalny zewnętrzny wektor jednostkowy
Pr	– liczba Prandtla
Pr_T	– turbulentna liczba Prandtla
p	– ciśnienie lub jeśli z indeksami składowe naprężenia powierzchniowego
p_a	– ciśnienie otoczenia (atmosferyczne)
\vec{p}_n	– naprężenie powierzchniowe
\dot{Q}	– strumień ciepła
\dot{q}	– gęstość strumienia ciepła
\vec{R}	– reakcja poruszającego się płynu na ściankę
Re	– liczba Reynoldsa
Re_Δ	– siatkowa liczba Reynoldsa
r, φ	– płaski biegunowy układ współrzędnych

- r, θ, z – trójwymiarowy, cylindryczny układ współrzędnych
 $|\text{rot } \vec{v}|$ – moduł wektora rotacji
 \mathbf{S} – symetryczna część tensora prędkości względnej – tensor prędkości deformacji
 s – entropia
 S_{ij} – składowe tensora prędkości deformacji \mathbf{S}
 St – liczba Strouhala
 \mathbf{T} – tensor prędkości względnej
 T – temperatura bezwzględna
 t – czas
 U_i, u_i – oznaczenie wartości funkcji niewiadomej w dyskretnym punkcie i
 u – energia wewnętrzna, składowa prędkości
 u_c – energia wewnętrzna całkowita
 u_i – fizyczne składowe wektora prędkości
 V – objętość
 \dot{V} – strumień objętości
 V_f – prędkość czoła fali uderzeniowej
 v – prędkość
 v_* – prędkość dynamiczna (skala prędkości dla wewnętrznej części warstwy turbulentnej)
 v_p – prędkość na zewnątrz warstwy przyściennej (przepływu potencjalnego)
 v_T – skala prędkości dla warstwy przyściennej
 v^i, v_j – matematyczne kontrawariantne i kowariantne składowe wektora prędkości
 X, Y, Z – składowe siły masowej
 x, y, z – współrzędne kartezjańskie
 z – liczba zespolona ($x + iy$)
 α_p – współczynnik podrelaksacji dla korekt ciśnienia
 Γ – cyrkulacja prędkości
 $\vec{\nabla}$ – symbol operatora gradientu
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ – kroki dyskretnego podziału przestrzeni i czasu

Δp_{st}	– spadki ciśnienia na skutek oporów tarcia na prostych odcinkach rury (straty liniowe)
Δp_{sl}	– spadki ciśnienia wywołane lokalnymi geometrycznymi utrudnieniami przepływu (straty miejscowe, lokalne)
δ	– grubość warstwy przyściennej
δ^*	– liniowa miara zmniejszenia strumienia masy (objętości)
δ^{**}	– liniowa miara zmniejszenia strumienia pędu
δ_{ij}	– składowe tensora jednostkowego (delta Kroneckera)
ε	– składniki przekątniowe tensora prędkości deformacji, dyssypacja energii turbulentnej
Θ	– składniki pozaprzekątniowe tensora prędkości deformacji elementu płynu
κ	– wykładnik izentropy
λ	– przewodność cieplna, współczynnik prędkości, liczba Laval
μ	– lepkość dynamiczna płynu
μ_T	– lepkość turbulentna
μ_{AD}	– antydyfuzyjny korektor numeryczny
ν	– lepkość kinematyczna
ν_D	– sztuczna dyfuzja numeryczna
$\mathbf{\Pi}$	– tensor naprężeń powierzchniowych
$\mathbf{\Pi}_T$	– tensor naprężeń turbulentnych
ρ	– gęstość
τ	– naprężenia styczne (z indeksami)
τ_0	– naprężenie na ścianie
τ^{LJ}	– tensor naprężeń w układzie kartezjańskim
τ_{ij}^f	– fizyczne składowe tensora naprężeń
τ^{ij}	– kontrawariantny tensor naprężeń
Φ	– potencjał prędkości
Ψ	– funkcja prądu
$\mathbf{\Omega}$	– antysymetryczna część tensora \mathbf{T} – tensor prędkości obrotów elementu płynu
Ω_{ij}	– składowe tensora $\mathbf{\Omega}$
ω	– prędkość kątowna

1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

1.1. Przedmiot, podział i podstawowe zagadnienia mechaniki płynów

Płyny są to substancje mające wspólną cechę polegającą na zdolności do zmiany swych kształtów pod działaniem dowolnie małych sił zewnętrznych, jeśli działają one dostatecznie długo. Płyny różnią się, zatem od ciał stałych tym, że nie posiadają tzw. sztywności postaciowej. Wynika to oczywiście ze struktury cząsteczkowej i małych wewnętrznych sił spójności w porównaniu z ciałami stałymi.

Płyny dzielimy na ciecze i gazy.

Ciecze to te płyny, które zmieniają nieznacznie swoją objętość pod działaniem sił zewnętrznych (nawet bardzo dużych). Inaczej mówimy, że ciecze są nieściśliwe. Ciecze wypełniają część zbiorników, równą objętości wprowadzonej cieczy, tworzą powierzchnie swobodne, oraz krople w wyniku działania napięcia powierzchniowego.

Gazy są to te płyny, które charakteryzują się dużą ściśliwością, tzn. zmieniają łatwo swą objętość pod działaniem zewnętrznych sił. Wypełniają całe objętości naczyń, w których się znajdują. Procesy sprężania i rozprężania gazów podlegają znanym przemianom termodynamicznym.

Przedmiotem mechaniki płynów jest badanie zjawisk występujących podczas ruchu i spoczynku płynów wraz z oddziaływaniem płynów na ścianki ciał stałych zanurzonych w płynie. Jednocześnie zadaniem mechaniki płynów jako dyscypliny podstawowej jest poznanie praw rządzących ruchem płynów. Dotyczy to szczególnie przepływów turbulentnych, które od dziesiątków lat stanowią w dalszym ciągu nierozwiązany ogólnie, trudny problem tej dyscypliny nauki i techniki.

Ogólnie mechanikę płynów można podzielić na:

1. Doświadczalną
2. Teoretyczną
3. Komputerową (numeryczną)

Na uwagę zasługuje dział trzeci, który pojawił się i nabrał ogromnego znaczenia wraz z rozwojem techniki komputerowej. Rywalizuje on skutecznie, co do znaczenia z częścią doświadczalną. Nazywana jest ta część przez wielu polskich autorów Numeryczną Mechaniką Płynów. Numeryczna tzn. z angielskiego liczbowa, cyfrowa (numerical). Nazwa ta jednak nie wskazuje bezpośrednio na urządzenie, które służy do realizacji zadań numerycznej mechaniki płynów, a jest nim komputer! Moc obliczeniowa komputera, liczba procesorów, pojemność pamięci, system operacyjny i oprogramowanie mają wpływ na możliwości realizacji wybranego algorytmu numerycznego rozwiązania równań. Szereg operacji pomocniczych, głównie graficznych, takich jak np. generacje dyskretnych siatek, graficzna analiza wyników obliczeń mimo, że nie należą do algorytmu rozwiązania równań, mają kluczowe znaczenie dla realizacji rozwiązywanego zagadnienia. Dlatego w tej książce używane jest określenie *komputerowe metody symulacji przepływów*, a nie numeryczne metody mechaniki płynów.

Tradycyjnie Mechanikę Płynów jako dział Mechaniki dzielimy także na

- a) statykę,
- b) kinematykę,
- c) dynamikę.

Podział ten będzie miał zastosowanie w tej książce.

W treści fizycznej wielkości skalarnych, wektorowych i tensorowych, które będą używane w tej książce szczególne znaczenie ma niezmienniczość tych wielkości względem układów współrzędnych. Wyraża to zasadę, że prawa przyrody, do formułowania których te wielkości służą, mają obiektywny charakter. Oznacza to ich niezależność od wyboru subiektywnych układów odniesienia, ale także układów jednostek. Zasady mechaniki (ogólniej fizyki) muszą zawierać tę samą obiektywną treść w różnych układach odniesienia. W ramach tej książki zajmiemy się zasadami mechaniki klasycznej – nierelatywistycznej. Prawa jej są niezmiennicze w dowolnych nieruchomych lub poruszających się względem siebie ze stałą prędkością układach odniesienia. Określane jest to jako niezmienniczość względem transformacji Galileusza.

1.1.1. Ośrodek ciągły, element płynu

Podobnie jak w licznych działach fizyki, w zakresie mechaniki płynów wykorzystuje się model *ośrodka ciągłego*. Oznacza to, że płyn wypełnia przestrzeń w sposób ciągły bez pustych obszarów typowych dla struktury molekularnej i związanych z tym zjawisk mikroskopowych takich jak np. chaotyczny ruch cieplny cząsteczek. Sformułowane zostaną prawa makromechaniki w odniesieniu do tzw. *elementu płynu*. Element płynu (oznaczany dV) jest to bardzo mała ilość płynu, której wymiary liniowe są dużo mniejsze od wymiarów opływanych ciał lub kanałów, a jednocześnie o wymiarach dużo większych od średniej drogi swobodnej molekuł lub ich temperaturowej amplitudy drgań, czyli zawierająca ogromną liczbę molekuł. Jest to zazwyczaj łatwe do spełnienia, gdyż np. element o objętości $1 \mu\text{m}^3$ powietrza zawiera w normalnych warunkach (ok. 290 K, 1000 hPa) ogromną liczbę molekuł około $2,7 \cdot 10^7$. Masa elementu płynu jest równa $M \cdot N$, gdzie: N – średnia liczba cząsteczek w objętości dV , a M – masa cząsteczki. Gęstość płynu definiujemy jako

$$\rho = \frac{M \cdot N}{dV} \quad (1.1)$$

Ograniczeniem w przypadku gazów jest rozrzedzenie gazu, np. powietrza atmosferycznego na znacznych wysokościach nad ziemią. Ujmuje to tzw. liczba Knudsena

$$Kn = \frac{l'}{l} \quad (1.2)$$

gdzie: l' – średnia droga swobodna molekuł gazu,
 l – liniowy wymiar kanału lub opływającego ciała.

Przyjęto, że stosowanie modelu ośrodka ciągłego jest dopuszczalne, gdy $Kn < 0,01$.

1.1.2. Podstawowe zagadnienia mechaniki płynów

Model ośrodka ciągłego pozwala na określenie makroskopowych *właŝności płynu jako funkcji przestrzeni oraz czasu i potraktowanie ich jako*

pól, co stwarza możliwości zastosowania ogólnych twierdzeń teorii pola w mechanice płynów.

Prawa rządzące zachowaniem się płynów zostaną sformułowane w oparciu o podstawowe zasady fizyki tj.: *zasadę zachowania masy*, *zasadę zachowania pędu* i krętu oraz *zasadę zachowania energii*. Prawa te zostaną wyrażone w postaci układu różniczkowych równań cząstkowych lub całkowych. Zadanie sprowadzi się, zatem do rozwiązania układu tych równań z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. Jest to tzw. *podstawowe zagadnienie mechaniki płynów*. Rozwiązanie tego problemu pozwala na określenie ruchu płynu w rozpatrywanej przestrzeni i w konsekwencji obliczenia sił nośnych, sił oporów, strat energii mechanicznej itp. Rozwiązania te są trudne, ponieważ wspomniany układ równań jest nieliniowy, a najczęstszą postacią ruchu płynów jest skomplikowany, niestacynny przepływ zwany przepływem turbulentnym. Nie istnieje do chwili obecnej ogólne rozwiązanie turbulencji i przy rozwiązywaniu podstawowego zagadnienia korzystać trzeba z modeli wspomaganych danymi eksperymentalnymi. Modele te nie są ogólne. Różnią się zestawami współczynników eksperymentalnych w zależności od szczególnego przypadku rozważanego przepływu.

Rozwiązywanie zagadnienia podstawowego jest obecnie możliwe dzięki metodom komputerowym. Komputerowa Dynamika Płynów (CFD) staje się wobec tego równie ważnym jak doświadczalna, działem Mechaniki Płynów. Programy komputerowe zbudowane dzięki metodom Komputerowej Dynamiki Płynów są coraz szerzej stosowanymi narzędziami badań podstawowych, a także są wykorzystywane przy projektowaniu maszyn w różnych dziedzinach techniki. Dlatego ostatnie cztery rozdziały tej książki są poświęcone metodom komputerowej symulacji przepływów cieczy i gazów.

1.2. Siły działające w płynach

Siły działające w płynach dzielimy na:

1. Siły masowe
2. Siły powierzchniowe.

ad. 1. Jednostkowa siła masowa \vec{F}_m działająca na masę elementu płynu ma wymiar $[\text{N/kg}] \equiv [\text{m/s}^2]$, czyli wymiar przyspieszenia. Siła masowa w $[\text{N}]$ wynosi

$$\vec{F}_m \cdot \rho dV \quad (1.3)$$

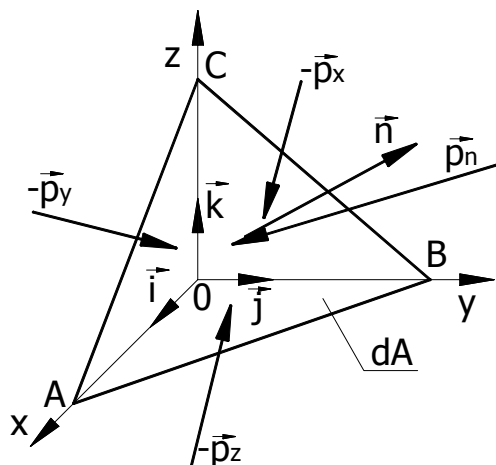
gdzie: ρdV – masa elementu dV .

Przykładami takich sił są: siła grawitacyjna i siła bezwładności.

ad. 2. Jednostkowa siła powierzchniowa \vec{p}_n ma wymiar naprężenia, a jej definicja jest zgodna z powszechnie znaną w mechanice definicją naprężenia. Problemy związane z tym rodzajem sił wymagają szczegółowego omówienia. Zastosowany będzie kartezjański układ współrzędnych x, y, z .

1.2.1. Siły powierzchniowe, tensor naprężeń

Aby opisać stan naprężeń powierzchniowych w płynie rozpatrzmy jego element dV w formie czworościanu $ABC0$, pokazanego na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Wypadkowa naprężeń powierzchniowych \vec{p}_n i jej składowe

Naprężenie \vec{p}_n zależy nie tylko od położenia elementu w układzie współrzędnych, ale również od przestrzennej orientacji wycinka powierzchni dA , na której działa, określonego zewnętrznym jednostkowym wektorem \vec{n} (rys. 1.1), stąd oznaczenie \vec{p}_n . Trójkątny element powierzchni dA jest

dowolnie usytuowany w układzie kartezjańskim x, y, z o wersorach $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Wektory sił powierzchniowych: $-\vec{p}_x, -\vec{p}_y, -\vec{p}_z$ – zgodnie z rys. 1.1 – działają na elementy powierzchni dA_x, dA_y i dA_z , które są rzutami powierzchni dA wg wzorów:

$$dA_x = dA n_x, \quad dA_y = dA n_y, \quad dA_z = dA n_z \quad (1.4)$$

n_x, n_y i n_z są składowymi \vec{n} określonego wzorem

$$\vec{n} = \vec{i} n_x + \vec{j} n_y + \vec{k} n_z. \quad (1.5)$$

Wektory: $-\vec{p}_x, -\vec{p}_y, -\vec{p}_z$ są opatrzone znakami „-”, gdyż działają na tę stronę powierzchni: dA_x, dA_y, dA_z , które są wyróżnione przez $-\vec{i}, -\vec{j}$ oraz $-\vec{k}$, natomiast \vec{p}_n działa na tę stronę powierzchni dA , która jest wyróżniona przez wektor \vec{n} .

Wektory: $-\vec{p}_x, -\vec{p}_y, -\vec{p}_z$ nie są prostopadłe odpowiednio do dA_x, dA_y i dA_z .

Gdy założymy, że charakterystyczny wymiar liniowy dl elementu dV dąży do zera to, siły masowe i przyrosty sił powierzchniowych (np. $\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx \cdot dA_x$, patrz wzór (1.15)) są proporcjonalne do $(dl)^3$, natomiast siły powierzchniowe do $(dl)^2$ i stąd możemy napisać warunek równowagi sił powierzchniowych pomijając człony rzędu $O(dl)^3$

$$\vec{p}_n dA - \vec{p}_x dA_x - \vec{p}_y dA_y - \vec{p}_z dA_z = 0. \quad (1.6)$$

Wykorzystując (1.4) można z (1.6) wyliczyć, że

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z. \quad (1.7)$$

Wektory \vec{p}_x, \vec{p}_y i \vec{p}_z , które są skierowane przeciwnie w stosunku do wektorów $-\vec{p}_x, -\vec{p}_y, -\vec{p}_z$ z rys. 1.1, rozkładamy na składowe skalarne

oznaczając, składowe normalne przez p , a styczne przez τ z podwójnymi indeksami wg wzorów:

$$\begin{aligned}\vec{p}_x &= \vec{i} p_{xx} + \vec{j} \tau_{xy} + \vec{k} \tau_{xz}, \\ \vec{p}_y &= \vec{i} \tau_{yx} + \vec{j} p_{yy} + \vec{k} \tau_{yz}, \\ \vec{p}_z &= \vec{i} \tau_{zx} + \vec{j} \tau_{zy} + \vec{k} p_{zz}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Na podstawie równań (1.7) oraz (1.8) można obliczyć składowe skalarne wektora \vec{p}_n :

$$\begin{aligned}p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}, \\ p_{ny} &= n_x \tau_{xy} + n_y p_{yy} + n_z \tau_{zy}, \\ p_{nz} &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z p_{zz}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Wektor \vec{p}_n można, zatem wyrazić jako wynik działania wektora \vec{n} na zbiór opisany macierzą:

$$\mathbf{\Pi} \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix}.\tag{1.10}$$

Można udowodnić [30], że zbiór (1.10) spełnia warunki transformacji wymagane od tensora 2-go rzędu i nazywamy go **tensoriem naprężeń powierzchniowych**, a zatem

$$\vec{p}_n = \vec{n} \mathbf{\Pi}.\tag{1.11}$$

Gdy zastosujemy do elementu dV (ABCO, rys. 1.1) zasadę zachowania krętu jak w [25], to można udowodnić, że $\mathbf{\Pi}$ jest tensorem symetrycznym, czyli:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.\tag{1.12}$$

Tensor Π jest, więc określony sześcioma, a nie dziewięcioma składowymi skalarnymi: trzema naprężeniami normalnymi i trzema stycznymi. Zamiana wskaźników τ_{ij} na τ_{ji} jest wobec powyższego dozwolona.

Wyjaśnimy następnie jak wśród składowych skalarnych tensora Π umiejscowione jest powszechnie znane naprężenie ściskające zwane **ciśnieniem** p .

Załóżmy, że nie istnieją naprężenia styczne, a tylko normalne p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} . Na element dA natomiast działa siła $\vec{p}_n = -\vec{n} p$, gdzie p jest nazywane ciśnieniem. „-” oznacza, że siła zewnętrzna \vec{p}_n jest skierowana przeciwnie do wektora \vec{n} . **Stan taki istnieje przy braku ruchu płynu**, tzn. w statyce płynów, a **także zakłada się taki stan w czasie ruchu tzw. płynów nielepkich**.

Równanie (1.7) przyjmuje wtedy postać:

$$-\vec{n} p = \vec{i} p_{xx} n_x + \vec{j} p_{yy} n_y + \vec{k} p_{zz} n_z. \quad (1.13)$$

Biorąc pod uwagę (1.5) oraz podany powyżej rozkład wektora \vec{n} na składowe dochodzimy do wniosku, że z porównania składowych dla każdego z wersorów wynika:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p. \quad (1.14)$$

Widzimy, więc że ciśnienie nie zależy od kierunku \vec{n} i działa jako jednakowe naprężenie ściskające, na każdą ze ścianek elementu na rys. 1.1. Prawo to zostało dawno temu wyrażone przez Pascala. Zgodnie z analizą tensorową [30], jednym z niezmienników tensora, tzn. wielkością nie ulegającą zmianie przy dowolnej transformacji układu współrzędnych, jest suma wyrazów przekątniowych, a zatem niezmiennikiem tym jest

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p. \quad (1.15)$$

Nazywane jest to również w innych monografiach prawem Eulera o skalarnym charakterze ciśnienia [37].

Ciśnienie p nazywane statycznym można traktować jako bezwzględne lub operować różnicą ciśnień tzw. nadciśnieniem, tj. $p - p_a$, (gdzie p_a jest bezwzględnym ciśnieniem atmosferycznym) lub podciśnieniem $p_a - p$.