Spis treści

PRZEDMOWA **1**

I WSTĘP DO ANALIZY MATEMATYCZNEJ **3**

1 Wiadomości wstępne *(Andrzej Piątkowski)* 5
1.1 Logika 5
1.2 Rachunek zbiorów 11
1.3 Zbiory liczbowe 15
1.4 Wartość bezwzględna i jej własności 16
1.5 Przedziały, otoczenia, sąsiedztwa 17
1.6 Silnia i symbol Newtona 19
1.7 Własności potęgowania 20
1.8 Logarytm i jego własności 21
1.9 Płaszczyzna kartezjańska, przestrzeń kartezjańska 21

2 Funkcja i jej własności *(Andrzej Piątkowski)* 25
2.1 Pojęcie funkcji i jej wykresu 25
2.2 Złożenie funkcji, funkcja odwrotna 26
2.3 Własności funkcji 32
2.4 Przekształcenia wykresów 36
2.5 Przegląd pewnych funkcji podstawowych 38

2.6 Pojęcie funkcji elementarnej 55

3 Ciągi *(Andrzej Piątkowski)* 57
3.1 Pojęcie ciągu 57
3.2 Własności ciągów 59
3.3 Granica ciągu 60
3.4 Ciąg arytmetyczny i geometryczny 69
3.5 Sumy częściowe ciągów 72
3.6 Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego 73
3.7 Liczba e, funkcja wykładnicza o podstawie naturalnej 76

4 Równania i nierówności *(Agnieszka Niedziałkowska)* 79
4.1 Wiadomości wstępne 79
4.2 Równania liniowe 85
4.3 Nierówności liniowe 86
4.4 Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi 87
4.5 Równania kwadratowe 91
4.6 Nierówności kwadratowe 92
4.7 Równania trygonometryczne 95
4.8 Równania wykładnicze 106
4.9 Równania logarytmiczne 109

5 Granica i ciągłość funkcji *(Marek Małolepszy)* 113
5.1 Pojęcie granicy funkcji 113
5.2 Obliczanie granic 121
5.3 Ciągłość funkcji 130

6 Pochodna *(Andrzej Piątkowski)* 137
6.1 Pojęcie pochodnej 137
6.2 Własności pochodnej 142
6.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji 148
6.4 Zadania optymalizacyjne 152
6.5 Pochodna drugiego rzędu 158

7 Rachunek całkowy *(Andrzej Piątkowski)* 161
7.1 Funkcja pierwotna 161
7.2 Całka nieoznaczona 163
7.3 Całka oznaczona 169

8 Wektory w przestrzeni kartezjańskiej *(Andrzej Piątkowski)* 173
8.1 Wektory zaczepione i swobodne 173
8.2 Współrzędne wektorów 175
8.3 Przestrzeń euklidesowa 176
8.4 Działania na wektorach 176
8.5 Przebiegi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ 182

II WSTĘP DO WYBRANYCH ZAGADNIEŃ Z FIZYKI 185

9 Układy inercjalne i nieinercjalne *(Krystyna Krasińska)* 187
9.1 Opis ruchu. Układ odniesienia 187
9.2 Zadania - inercjalne układy odniesienia 205
9.3 Zadania - układy inercjalne i nieinercjalne 218

10 Ruch drgający *(Mariusz Krasiński)* 233
10.1 Sposoby opisu drgań 234
10.2 Drgania harmoniczne proste 235
10.3 Drgania harmoniczne tłumione 252
10.4 Drgania harmoniczne wymuszone z tłumieniem 258
10.5 Drgania w dwóch wymiarach 261

11 Fale *(Mariusz Krasiński)* 267
11.1 Rodzaje fal 268
11.2 Fale w jednym, dwóch i trzech wymiarach 271
11.3 Matematyczny opis fali 272
11.4 Prędkość fazowa fali 274
11.5 Prędkości fal mechnicznych w różnych ośrodkach 277
11.6 Interferencja fal 279
11.7 Dudnienia 285
11.8 Fala stojąca 287
11.9 Efekt Dopplera 294
11.10Zasada Huygensa 299

12 Optyka geometryczna *(Michał Dobrski)* 301
12.1 Wprowadzenie 301
12.2 Prawa opisujące bieg promieni 302
12.3 Zwierciadła i soczewki 305

13 Fizyka współczesna *(Piotr Słoma, Janusz Tomaszewski)* 319
13.1 Kształtowanie się poglądów na światło na przestrzeni dziejów 319
13.2 Światło jako fala elektromagnetyczna 323
13.3 Światło jako strumień cząstek 346
13.4 Dualizm korpuskularno-falowy materii 354
13.5 Promieniotwórczość 375
13.6 Twórcy starszej fizyki współczesnej z przymrużeniem oka . . 379

PRZEDMOWA

Kto nie zna matematyki, nie może
poznać innych nauk ścisłych
i nie może poznać świata
Roger Bacon

Wprowadzenie studiów trójstopniowych: inżynierskich bądź licencjackich, magisterskich i doktoranckich w szkolnictwie wyższym oraz wdrożona reforma kształcenia na poziomie szkolnym to nie lada wyzwanie dla całego środowiska akademickiego matematyków, fizyków i inżynierów. Uczniowie i studenci uczą się coraz mniej matematyki i fizyki, pogłębia się luka między szkolną a akademicką matematyką i fizyką, zmniejszył się, i to bardzo, zakres materiału, jaki mają do opanowania maturzyści. Dostrzegamy poważny niedostatek u studentów I roku niezbędnej techniki rachunkowej, wyraźny spadek umiejętności analitycznych. Sylwetka i przygotowanie absolwentów szkół ponadgimnazjalnych uległy w ciągu ostatnich lat radykalnej zmianie. Obecnie poziom matury, szczególnie tej zdawanej na poziomie podstawowym, nie gwarantuje, że kandydat aplikujący na uczelnię techniczną posiada wiedzę i umiejętności w zakresie matematyki i fizyki na poziomie umożliwiającym studiowanie.

Autorzy tego skryptu pragną zachęcić do sięgnięcia po niego przede wszystkim studentów I roku studiów technicznych, jak również maturzystów, którzy zamierzają podjąć studia na uczelni technicznej. Poruszamy w nim tematy, z którymi najczęściej studenci sobie nie radzą. Sprawdzenie i uzupełnienie wiedzy będzie dużym ułatwieniem w zrozumieniu treści wykładów z matematyki i fizyki na pierwszym roku studiów. Bardzo dobrym uzupełnieniem tego skryptu, jeśli chodzi o część praktyczną, jest "Zbiór zadań z matematyki i fizyki dla kandydatów na Politechnikę Łódzką" — Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2005 r., redakcja A. Just.

Na uczelniach technicznych rozpoczyna studia młodzież o bardzo szerokim spektrum przygotowania merytorycznego z matematyki i fizyki, od bardzo dobrze do zdecydowanie słabo przygotowanych. Aby nie bać się matematyki, przedmiotów ścisłych, a w przyszłości nowoczesnej technologii, zajrzyjcie koniecznie do tego skryptu, sprawdźcie wszyscy, czy wiecie to, co przyszły student uczelni technicznej wiedzieć powinien.

ROZDZIAŁ 1

Wiadomości wstępne

Andrzej Piątkowski

1.1 Logika

1.1.1 Zdania, tautologie

Logika jest nauką zajmującą się zdaniami. Z punktu widzenia logiki istotne jest, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie. Nie jest natomiast istotne o czym to zdanie mówi.

Definicja 1.1. *Zdaniem w sensie logiki nazywać będziemy każdą wypowiedź, o której da się powiedzieć, czy jest prawdziwa, czy fałszywa (inaczej: której da się przyporządkować jedną z dwu wartości logicznych: prawdę lub fałsz).*

Z definicji tej widać łatwo, że zdanie w sensie logiki musi być zdaniem oznajmującym w sensie gramatycznym. Nie każde jednak zdanie oznajmujące w sensie gramatyki jest zdaniem w sensie logiki, np. „a jest liczbą parzystą" jest gramatycznie zdaniem oznajmującym, ale o wypowiedzi tej nie da się powiedzieć, czy jest prawdziwa dopóki nie wiemy, jaką liczbą jest a.

Zdania oznaczać będziemy symbolami p, q, r itd. Niech p będzie zdaniem. Fakt, że zdanie p jest prawdziwe będziemy zapisywać w postaci $w(p) = 1$ (czytamy: wartość logiczna zdania p wynosi 1). Odpowiednio fakt, że zdanie p jest fałszywe zapisujemy w postaci $w(p) = 0$ (czytamy: wartość logiczna zdania p wynosi 0).

Mając dane pewne zdania, możemy z nich za pomocą *funktorów zdaniotwórczych* (*spójników*) tworzyć nowe zdania bardziej złożone. Oto definicje pewnych podstawowych funktorów zdaniotwórczych:

Definicja 1.2. *Jeżeli p jest danym zdaniem, to zdanie „nieprawda, że p" nazywamy negacją albo zaprzeczeniem zdania p. Negację zdania p zapisujemy za pomocą symbolu $\sim p$. Wartości logiczne negacji opisuje następująca tabela:*

p	$\sim p$
0	1
1	0

.

Niech p, q będą dwoma danymi zdaniami.

Definicja 1.3. *Zdanie „p lub q" nazywamy alternatywą albo sumą logiczną zdań p, q. Alternatywę zdań p, q zapisujemy za pomocą symbolu $p \vee q$. Zdanie $p \vee q$ jest fałszywe tylko w tym przypadku, gdy oba składniki tej alternatywy są fałszywe. Wartości logiczne alternatywy opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Definicja 1.4. *Zdanie „p i q" nazywamy koniunkcją albo iloczynem logicznym zdań p, q. Koniunkcję zdań p, q zapisujemy za pomocą symbolu $p \wedge q$. Zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe tylko w tym przypadku, gdy oba czynniki tej koniunkcji są prawdziwe. Wartości logiczne koniunkcji opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Definicja 1.5. *Zdanie „jeżeli p, to q" nazywamy implikacją albo wynikaniem. Implikację zapisujemy za pomocą symbolu $p \Rightarrow q$. Zdanie p nazywamy poprzednikiem, zaś zdanie q następnikiem implikacji $p \Rightarrow q$. Implikacja jest fałszywa tylko w tym przypadku, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik fałszywy. Wartości logiczne implikacji opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

.

Załóżmy, że zdanie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe (np. jest twierdzeniem matematycznym sformułowanym w postaci implikacji). Wówczas p nazywamy *warunkiem wystarczającym* albo *warunkiem dostatecznym* dla q, zaś q nazywamy *warunkiem koniecznym* dla p.

Definicja 1.6. *Zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" nazywamy równoważnością zdań p, q. Równoważność zapisujemy za pomocą symbolu $p \Longleftrightarrow q$. Równoważność $p \Longleftrightarrow q$ jest prawdziwa w tych przypadkach, gdy oba zdania p i q mają tę samą wartość logiczną. Wartości logiczne równoważności opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Jeżeli równoważność $p \Longleftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym (np. jest twierdzeniem matematycznym sformułowanym w postaci równoważności), to mówimy, że p jest *warunkiem koniecznym i wystarczającym* dla q i odwrotnie.

Najbardziej interesujacymi zdaniami złożonymi są takie, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań składowych.

Definicja 1.7. *Formułę, której wartość logiczna wynosi 1 niezależnie od wartości logicznych zdań składowych nazywamy prawem logicznym albo tautologią.*

Oto najważniejsze przykłady praw logicznych:

1. *Prawa przemienności*

$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p).$$

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p).$$

2. *Prawa łączności*

$$[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]\,.$$

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]\,.$$

3. *Prawa rozdzielności*

$$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\,.$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]\,.$$

4. *Prawo podwójnego przeczenia*

$$[\sim (\sim p)] \Longleftrightarrow p.$$

5. *Prawo wyłączonego środka*

$$p \ \vee (\sim p)\,.$$

Prawo to można także wyrazić słownie: *Z dwóch zdań p i $\sim p$ co najmniej jedno jest prawdziwe.*

6. *Prawo sprzeczności*

$$\sim (p \ \wedge (\sim p))\,.$$

Prawo to można także wyrazić słowami: *Z dwóch zdań p i $\sim p$ co najmniej jedno jest fałszywe.*

7. *Prawa de Morgana*

$$(\sim (p \vee q)) \Longleftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))\,.$$

$$(\sim (p \wedge q)) \Longleftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))\,.$$

8. *Prawo eliminacji implikacji*

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\sim p) \vee q)\,.$$

9. *Prawo zaprzeczania implikacji*

$$(\sim (p \Longrightarrow q)) \Longleftrightarrow (p \wedge (\sim q))\,.$$

10. *Prawo transpozycji*

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\sim q) \Longrightarrow (\sim p)).$$

Załóżmy, że dane jest twierdzenie matematyczne sformułowane w postaci implikacji $p \Longrightarrow q$. Nazwijmy to twierdzenie *twierdzeniem prostym*. Wtedy zdanie $q \Longrightarrow p$ nazywamy *twierdzeniem odwrotnym*, zdanie $(\sim p) \Longrightarrow (\sim q)$ nazywamy *twierdzeniem przeciwnym*, zaś zdanie $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$ — *twierdzeniem transponowanym*. Z prawa transpozycji wynika, że twierdzenia proste i transponowane są równoważne oraz że twierdzenia odwrotne i przeciwne są równoważne. Inne pary twierdzeń w tym układzie nie muszą być równoważne.

11. *Prawo eliminacji równoważności*

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)).$$

1.1.2 Formy zdaniowe, kwantyfikatory

Definicja 1.8. *Niech X będzie ustalonym zbiorem. Formą (funkcją) zdaniową zmiennej x o dziedzinie X nazywamy wyrażenie $\varphi(x)$ zawierające zmienną x, które staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej x wstawimy dowolny element ze zbioru X.*

Przykładami form zdaniowych są równania i nierówności:

$$2x + 1 = 7 \tag{1.1}$$

$$\frac{x-3}{2x+3} \geqslant x - 4 \tag{1.2}$$

$$\sqrt{1 - x^2} > 3. \tag{1.3}$$

Formą zdaniową jest także wyrażenie:

$$\textit{Liczba } x \textit{ jest parzysta.} \tag{1.4}$$

Najczęściej z samej postaci formy zdaniowej jesteśmy w stanie odczytać jej dziedzinę. Dziedziną formy zdaniowej (1.1) jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dziedziną formy (1.2) — zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby $-\frac{3}{2}$, dziedziną formy (1.3) — zbiór liczb z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$ i wreszcie dziedziną formy (1.4) — zbiór liczb całkowitych.

W sposób analogiczny definiujemy formy zdaniowe większej ilości zmiennych.

Definicja 1.9. *Kwantyfikatorem ogólnym nazywamy wyrażenie „dla każdego x", które postawione przed formą zdaniową zmiennej x czyni z niej zdanie. Kwantyfikator ogólny postawiony przed formą zdaniową $\varphi(x)$ zapisujemy symbolicznie*

$$\bigwedge_x \varphi(x)$$

i czytamy „dla każdego x spełniony jest warunek $\varphi(x)$".

Kwantyfikatorem szczegółowym nazywamy wyrażenie „istnieje x takie, że", które postawione przed formą zdaniową zmiennej x czyni z niej zdanie. Kwantyfikator szczegółowy postawiony przed formą zdaniową $\varphi(x)$ zapisujemy symbolicznie

$$\bigvee_x \varphi(x)$$

i czytamy „istnieje takie x, że spełniony jest warunek $\varphi(x)$".

Przykład 1.10. Zdanie

$$\bigwedge_x \left(x^2+1>0\right)$$

jest zdaniem prawdziwym, gdyż forma zdaniowa $x^2+1>0$ jest spełniona dla wszystkich elementów swojej dziedziny, czyli dla wszystkich liczb rzeczywistych. Podobnie zdanie

$$\bigvee_x \left(x^2+2x-3=0\right)$$

jest zdaniem prawdziwym, gdyż na przykład liczba -3 spełnia formę zdaniową $x^2+2x-3=0$. Zdanie

$$\bigwedge_x \left(\frac{x-1}{x+2} \leqslant 5\right)$$

jest zdaniem fałszywym, gdyż na przykład liczba $-\frac{5}{2}$, która jest różna od -2, więc leży w dziedzinie, nie spełnia formy zdaniowej $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 5$. Wreszcie zdanie

$$\bigvee_x \left(x^2+x+1 \leqslant 0\right)$$

jest zdaniem fałszywym, gdyż nie ma takiej liczby x, która spełniałaby formę zdaniową $x^2+x+1 \leqslant 0$.

W rachunku kwantyfikatorów wprowadza się także pojęcie prawa. *Prawem rachunku kwantyfikatorów* będzie zdanie zawierające kwantyfikatory, które jest prawdziwe niezależnie od tego, jakie formy zdaniowe do tego zdania wstawimy. Istotnymi dla nas prawami rachunku kwantyfikatorów będą *prawa de Morgana*:

$$\left[\sim\left(\bigwedge_x \varphi(x)\right)\right] \iff \left[\bigvee_x (\sim \varphi(x))\right]$$

$$\left[\sim\left(\bigvee_x \varphi(x)\right)\right] \iff \left[\bigwedge_x (\sim \varphi(x))\right].$$

1.2 Rachunek zbiorów

Zakładamy, że wiadomo, co to jest zbiór i co to jest element zbioru (są to tak zwane pojęcia pierwotne). Umawiamy się, że zbiory będziemy oznaczać symbolami $A, B, \ldots, X, Y, Z$, zaś ich elementy — symbolami $a, b, \ldots, x, y, z$.

Fakt, że a jest elementem zbioru A, zapisywać będziemy symbolicznie

$$a \in A,$$

zaś fakt, że a nie jest elementem zbioru A — symbolem

$$a \notin A.$$

Zbiory zawierające skończoną ilość elementów nazywać będziemy *skończonymi*. W szczególności zbiór niezawierający żadnego elementu nazywamy *pustym* i oznaczamy symbolem $\varnothing$. Zbiory zawierające nieskończoną ilość elementów nazywamy *nieskończonymi*. Zbiór skończony może być zadany przez wymienienie wszystkich elementów tego zbioru, np.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

jest zbiorem złożonym z liczb naturalnych mniejszych od 9. Oczywiście w ten sposób nie da się zadać żadnego zbioru nieskończonego. Mimo to czasami stosowana jest ta nieprecyzyjna metoda do opisywania zbiorów nieskończonych, np. pisząc

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

domyślamy się, że chodzi o zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych. Aby móc precyzyjnie określać zbiory (także nieskończone), wprowadzamy następujący zapis: niech $\varphi(x)$ będzie dowolną formą zdaniową o dziedzinie X. Symbol

$$\{x : \varphi(x)\}$$

oznacza zbiór złożony z tych elementów dziedziny X, które spełniają formę zdaniową $\varphi(x)$, tzn. z tych elementów, które podstawione do formy $\varphi(x)$ czynią z niej zdanie prawdziwe. Symbol ten czytamy: „zbiór tych x, dla których spełniony jest warunek $\varphi(x)$".

Przykład 1.11. a) $\{x : x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{-3, 1\}$.
b) $\{x : 2x + 1 > 5\} = (2, \infty)$,
c) $\{2, 4, 6, \dots\} = \left\{x : \bigvee_{k \in \mathbb{N}} x = 2k\right\}$,
gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (służących do liczenia przedmiotów), począwszy od 1.

Na zbiorach określamy pewne relacje i działania. Oto definicje:
Niech A, B będą ustalonymi zbiorami

Definicja 1.12. *Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B (inaczej A jest podzbiorem B albo B zawiera A), co zapisujemy symbolem*

$$A \subset B,$$

gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Definicja 1.13. *Mówimy, że zbiory A, B są równe, co zapisujemy w postaci $A = B$, gdy są złożone z tych samych elementów.*

Łatwo widać, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1.14. $(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Definicja 1.15. *Sumą zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony z elementów należących do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B. Symbolicznie sumę tę oznaczamy przez $A \cup B$. Można zapisać tę definicję w sposób formalny:*

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Definicja 1.16. *Iloczynem albo częścią wspólną zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony z elementów należących do obu zbiorów A i B. Symbolicznie iloczyn ten oznaczamy przez $A \cap B$. Można zapisać tę definicję w sposób formalny:*

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Definicja 1.17. *Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi, gdy nie mają elementów wspólnych. Formalnie*

$$A \cap B = \varnothing.$$

Definicja 1.18. *Różnicą zbiorów A, B, oznaczaną symbolem $A \setminus B$, nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Formalnie*

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Załóżmy teraz, że wszystkie rozważane przez nas zbiory są zawarte w pewnej ustalonej przestrzeni X.

Definicja 1.19. *Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy symbolem A'. Formalnie*

$$A' = X \setminus A = \{x : x \notin A\}.$$

Mamy następujące:

Twierdzenie 1.20. *Jeżeli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są formami zdaniowymi o tej samej dziedzinie, to*

$$\{x : \varphi(x)\}' = \{x : \sim \varphi(x)\},$$

$$\{x : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x : \varphi(x)\} \cup \{x : \psi(x)\},$$

$$\{x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\}.$$

Definicja 1.21. *Parą uporządkowaną będziemy nazywać dwa elementy, z których jeden wyróżniony jest jako pierwszy. Analogicznie trójką uporządkowaną będziemy nazywać trzy elementy, z których jeden wyróżniony jest jako pierwszy, zaś drugi — jako drugi.*

Parę uporządkowaną o pierwszym elemencie a i drugim elemencie b będziemy oznaczać symbolem (a, b). Trójkę uporządkowaną o pierwszym elemencie a, drugim elemencie b i trzecim elemencie c będziemy oznaczać symbolem (a, b, c).

Przykład 1.22. Pokażemy teraz, w jaki sposób korzysta się z twierdzenia 1.20.

a) Wyznaczymy dziedzinę D funkcji f zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Korzystając z pierwszej równości w twierdzeniu 1.20, otrzymujemy

$$D = \{x : x - 2 \neq 0\} = \{x :\sim (x - 2 = 0)\} = \{x : x = 2\}' = \{2\}',$$

czyli dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 2.

b) Wyznaczymy podzbiór F płaszczyzny złożony z tych punktów, których współrzędne spełniają równanie

$$(x - y + 1)(2x + y - 3) = 0.$$

Korzystając z drugiej równości w twierdzeniu 1.20, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y) : (x - y + 1)(2x + y - 3) = 0\} \\ &= \{(x,y) : x - y + 1 = 0 \ \vee \ 2x + y - 3 = 0\} \\ &= \{(x,y) : x - y + 1 = 0\} \cup \{(x,y) : 2x + y - 3 = 0\}, \end{aligned}$$

czyli F jest sumą dwóch prostych o równaniach odpowiednio $x - y + 1 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$.

c) Znajdziemy zbiór F rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Korzystając z trzeciej równości w twierdzeniu 1.20, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y) : x - y + 1 = 0 \wedge 2x + y - 3 = 0\} \\ &= \{(x,y) : x - y + 1 = 0\} \cap \{(x,y) : 2x + y - 3 = 0\}, \end{aligned}$$

czyli F jest częścią wspólną prostych danych równaniami $x - y + 1 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$.

Twierdzenie 1.23. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące prawa rachunku zbiorów:*

1) Prawa przemienności:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

2) Prawa łączności:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3) Prawa rozdzielności:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4) Prawa de Morgana:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Niech A, B będą ustalonymi zbiorami.

Definicja 1.24. *Iloczynem kartezjańskim zbioru A przez zbiór B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$. Analogicznie iloczynem kartezjańskim trzech zbiorów A, B i C nazywamy zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (a, b, c) takich, że $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$.*

Iloczyn kartezjański zbioru A przez zbiór B oznaczać będziemy symbolem $A \times B$, zaś iloczyn kartezjański zbiorów A, B i C — symbolem $A \times B \times C$. Możemy więc powyższą definicję zapisać formalnie

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\},$$
$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ c \in C\}.$$

Zauważmy, że iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jest przemienny, tzn. równość $A \times B = B \times A$ nie jest prawdziwa (poza przypadkiem, gdy $A = B$). Na przykład, jeśli $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2\}$, to $A \times B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, podczas gdy $B \times A = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

W przypadku gdy $A = B$, to zamiast pisać $A \times A$, będziemy pisać A^2, zaś w przypadku, gdy $A = B = C$ będziemy pisać A^3 zamiast $A \times A \times A$.

1.3 Zbiory liczbowe

Wprowadzamy następujące oznaczenia zbiorów liczbowych

$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych ($\{1, 2, 3, ...\}$),
$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych (czasami używany jest symbol $\mathbb{W}$),
$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.

Dodatkowo dla potrzeb obliczania granic wprowadzamy dwa symbole: $+\infty$ (czytamy „plus nieskończoność") i $-\infty$ (czytamy „minus nieskończoność"). Często zamiast $+\infty$ będziemy pisać ∞. Umawiamy się, że dla każdej liczby rzeczywistej a spełnione są nierówności

$$-\infty < a < +\infty.$$

Czasami będziemy używać symbolu $\pm\infty$ i wtedy napis „$g = \pm\infty$" rozumiemy jako $g = +\infty$ lub $g = -\infty$, natomiast napis „$g \neq \pm\infty$" rozumiemy jako $g \neq +\infty$ i $g \neq -\infty$.

1.4 Wartość bezwzględna i jej własności

Definicja 1.25. *Modułem (wartością bezwzględną) dowolnej liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą równości*

$$|a| = \begin{cases} a & , gdy \quad a \geqslant 0 \\ -a & , gdy \quad a < 0 \end{cases}.$$

Geometrycznie $|a|$ oznacza odległość punktu a na osi liczbowej od punktu 0. Zauważmy, że równość

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{gdy} \quad a > 0 \\ -a & , \text{gdy} \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

daje definicję modułu równoważną sformułowanej powyżej. Wprost z definicji modułu wynikają jego podstawowe własności:

1. Dla każdej liczby a prawdziwa jest nierówność
$$|a| \geqslant 0.$$
2. Dla każdej liczby a prawdziwa jest nierówność podwójna
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$
3. Dla dowolnych liczb a, b spełniona jest równość
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$
4. Dla dowolnych liczb a, b, jeśli $b \neq 0$, to
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

5. Dla dowolnych liczb a, b spełniona jest nierówność (zwana *nierównością trójkąta*)
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są albo równocześnie nieujemne, albo równocześnie niedodatnie.

6. Dla dowolnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność
$$|a-b| \geqslant ||a| - |b||.$$

7. Dla każdej liczby a i dowolnego nieujemnego ε prawdziwa jest równoważność
$$|a| = \varepsilon \iff (a = \varepsilon \lor a = -\varepsilon).$$

8. Dla dowolnych liczb a, ε prawdziwa jest równoważność
$$|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon.$$

9. Dla dowolnych liczb a, ε prawdziwa jest równoważność
$$|a| > \varepsilon \iff (a > \varepsilon \lor a < -\varepsilon).$$

Własnosci 8 i 9 pozostają prawdziwe, gdy nierówności ostre zastąpimy nieostrymi.

1.5 Przedziały, otoczenia, sąsiedztwa

W zbiorze liczb rzeczywistych wprowadzamy pewne szczególne podzbiory zwane *przedziałami*:

- *Przedział otwarty właściwy:*
$$(a; b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$
gdzie a, b są liczbami spełniającymi nierówność $a < b$.

- *Przedział domknięty właściwy:*
$$\langle a; b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
gdzie a, b są liczbami spełniającymi nierówność $a < b$. Czasami zamiast $\langle a; b\rangle$ używa się symbolu $[a; b]$.

- *Przedziały domknięto-otwarte właściwe:*

$$\langle a; b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$
$$(a; b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\},$$

  gdzie a, b są liczbami spełniającymi nierówność $a < b$.

- *Przedziały otwarte niewłaściwe:*

$$(-\infty; b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$
$$(a; \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

  gdzie a, b są dowolnymi liczbami.

- *Przedziały domknięte niewłaściwe:*

$$(-\infty; b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\},$$
$$\langle a; \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\},$$

  gdzie a, b są dowolnymi liczbami.

- Dodatkowo czasami symbolem $(-\infty; \infty)$ będziemy oznaczać cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i w tym przypadku także będziemy mówić o przedziale niewłaściwym.

Ponadto w zbiorze liczb rzeczywistych wprowadzamy pojęcia otoczenia i sąsiedztwa punktów.

Definicja 1.26. *Niech x_0 będzie liczbą rzeczywistą i ε — liczbą rzeczywistą dodatnią. Otoczeniem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy podzbiór $U_\varepsilon(x_0)$ zbioru $\mathbb{R}$ określony za pomocą równości*

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Zauważmy, że z własności 8 modułu wynika, że spełniona jest równość

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

Definicja 1.27. *Otoczeniem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) liczby rzeczywistej x_0 o dodatnim promieniu ε nazywamy przedział*

$$(x_0 - \varepsilon; x_0\rangle \text{ (odpowiednio } \langle x_0; x_0 + \varepsilon)\text{)}$$

i otoczenie to oznaczamy symbolem $U_\varepsilon^-(x_0)$ (odpowiednio $U_\varepsilon^+(x_0)$).

Czasami, gdy wiadomo, jaki jest promień otoczenia lub jest obojętne, o jaki promień chodzi, opuszczamy w oznaczeniach otoczeń dolny wskaźnik ε i piszemy np. $U^{+}(x_0)$.

Definicja 1.28. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy zbiór określony za pomocą równości*

$$S_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Zauważmy, że z własności 8, 9 modułu wynika, że prawdziwa jest równość

$$S_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

Zatem $S_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Definicja 1.29. *Sąsiedztwem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) liczby rzeczywistej x_0 o dodatnim promieniu ε nazywamy przedział*

$$(x_0 - \varepsilon; x_0) \text{ (odpowiednio } (x_0; x_0 + \varepsilon))$$

i sąsiedztwo to oznaczamy symbolem $S_\varepsilon^{-}(x_0)$ (odpowiednio $S_\varepsilon^{+}(x_0)$).

W odniesieniu do sąsiedztw także obowiązuje umowa o ewentualnym opuszczaniu indeksu ε.

Zauważmy, że dla zdefiniowanych powyżej otoczeń i sąsiedztw punktu x_0 zawsze otoczenie zawiera punkt x_0, zaś sąsiedztwo nie zawiera tego punktu.

Dodatkowo umawiamy się, że jeśli a, b są liczbami, to przedział $(-\infty; b)$ będziemy nazywać *otoczeniem* lub *sąsiedztwem punktu* $-\infty$, zaś przedział $(a; \infty)$ nazywać będziemy *otoczeniem* lub *sąsiedztwem punktu* $+\infty$.

1.6 Silnia i symbol Newtona

Definicja 1.30. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy*

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Dodatkowo na mocy definicji $0! \stackrel{def}{=} 1$.

Symbol $n!$ czytamy „n silnia".

Definicja 1.31. *Niech $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie*

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy „n po k".

1.7 Własności potęgowania

Zakładając, że czytelnik zna pojęcie potęgowania przypomnimy, pewne prawa obowiązujące dla tego działania.

Na początek przypomnijmy, że dla niezerowej liczby a spełniona jest równość $a^0 = 1$. Dla liczb x, y oraz dodatnich liczb a, b (dla pewnych wykładników x, y założenia o a, b mogą być osłabiane w zależności od sytuacji) spełnione są wzory:

$$\begin{aligned}
a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\
\sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N} \text{ i } n > 1, \\
(a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}, \\
a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, && (1.5) \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, && (1.6) \\
(a^x)^y &= a^{xy}. && (1.7)
\end{aligned}$$

Ponadto mamy

Twierdzenie 1.32. *(Wzór dwumianowy Newtona) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Z wzoru dwumianowego Newtona uzyskujemy łatwo następujące wzory uproszczonego mnożenia:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}$$

Ponadto bardzo przydatne bywają następujące wzory uproszczonego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

1.8 Logarytm i jego własności

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$.

Definicja 1.33. *Logarytmem dodatniej liczby x przy podstawie a nazywamy taką liczbę y, że $a^y = x$. Logarytm liczby x przy podstawie a oznaczamy symbolem $\log_a x$. Symbolicznie możemy napisać*

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Umawiamy się, że jeżeli $a = 10$, to logarytm nazywamy *dziesiętnym* i w symbolicznym zapisie opuszczamy podstawę. Piszemy więc wtedy $\log x$.

Ze wzorów (1.5), (1.6) i (1.7) wynika następujące

Twierdzenie 1.34. *Dla dowolnych dodatnich liczb x, y, dowolnej liczby c oraz dowolnych dodatnich liczb a, b takich, że $a, b \neq 1$ prawdziwe są wzory*

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y, \\ \log_a(x^c) &= c\log_a x, \\ \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ostatni z wzorów (1.8) będziemy nazywać wzorem na zamianę podstaw logarytmu.

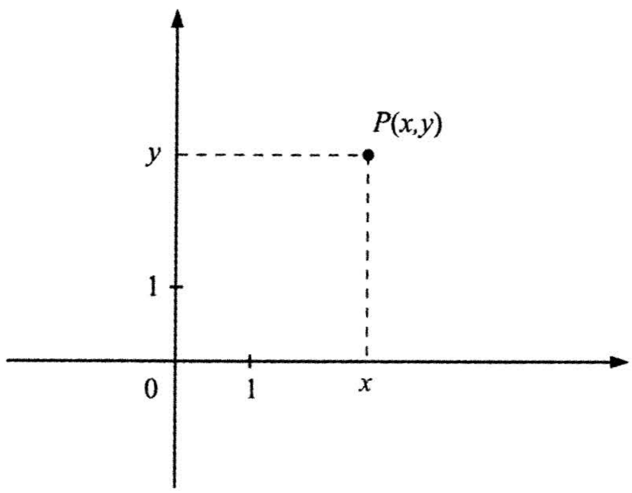
1.9 Płaszczyzna kartezjańska, przestrzeń kartezjańska

Definicja 1.35. *Prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy parę uporządkowaną osi liczbowych wzajemnie prostopadłych o wspólnym zerze i jednakowych jednostkach.*

Czasami ze względów praktycznych na osiach układu przyjmujemy różne jednostki.

Definicja 1.36. *Płaszczyznę z zadanym na niej prostokątnym układem współrzędnych będziemy nazywać płaszczyzną kartezjańską.*

Zwykle na płaszczyźnie układ współrzędnych umieszczamy w ten sposób, że pierwsza oś jest pozioma skierowana z lewa na prawo, zaś druga jest pionowa skierowana z dołu do góry. Oczywiście, położenie osi na płaszczyźnie jest kwestią czysto umowną. Zauważmy, że każdemu punktowi P płaszczyzny kartezjańskiej odpowiada wyznaczona jednoznacznie uporządkowana para liczb rzeczywistych (x, y) zwanych *współrzędnymi punktu* P. Współrzędna x jest współrzędną rzutu prostokątnego punktu P na pierwszej osi (przez rzut prostokąny punktu P na pierwszą oś rozumiemy punkt przecięcia tej osi z prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez punkt P), zaś y jest współrzędną rzutu prostokątnego punktu P na drugą oś.



Rys. 1.1

Jest także odwrotnie, tzn. jeżeli weźmiemy dowolną uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y), to parze tej odpowiada dokładnie jeden punkt P płaszczyzny kartezjańskiej taki, że współrzędnymi punktu P są właśnie liczby x i y. Jeżeli P ma współrzędne x i y, to będziemy pisać $P(x, y)$. Na rysunku 1.1 zilustrowano powyższe konstrukcje. Współrzędną x nazywamy *odciętą* punktu P, zaś y *rzędną* tego punktu. Oś odciętych zwykle oznaczamy symbolem Ox, zaś oś rzędnych symbolem Oy.

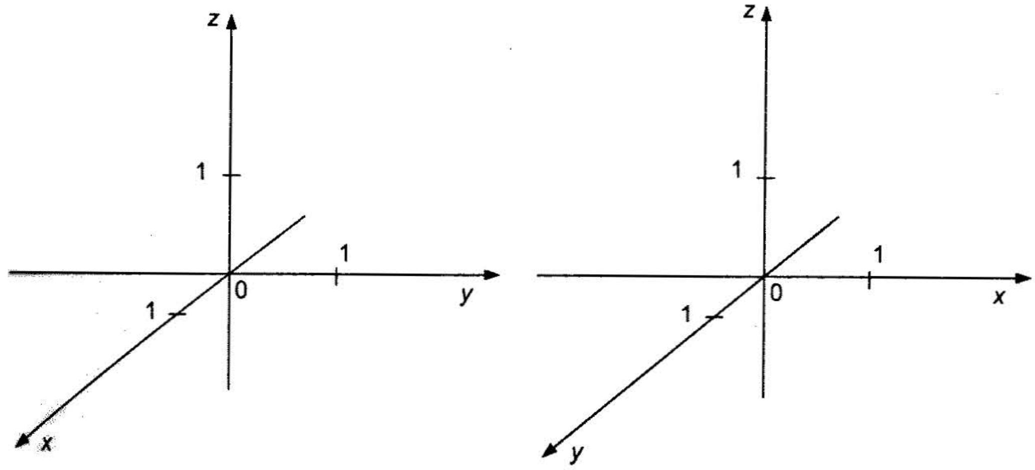
W związku z opisaną wyżej wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością między punktami płaszczyzny kartezjańskiej a uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych możemy płaszczyznę kartezjańską utożsamić ze zbiorem wszystkich par uporządkowanych liczb rzeczywistych. Będziemy więc płaszczyznę kartezjańską często oznaczać symbolem $\mathbb{R}^2$.

Definicja 1.37. *Prostokątnym układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trójkę uporządkowaną osi liczbowych wzajemnie prostopadłych o wspólnym zerze i jednakowych jednostkach.*

Zwykle pierwszą z osi układu oznaczamy symbolem Ox, drugą symbolem Oy, zaś trzecią symbolem Oz. Płaszczyznę zawierającą osie Ox i Oy oznaczać będziemy symbolem Oxy. Analogiczne oznaczenia stosujemy do pozostałych płaszczyzn wyznaczonych przez osie układu. Czasami ze względów praktycznych na osiach układu przyjmujemy różne jednostki.

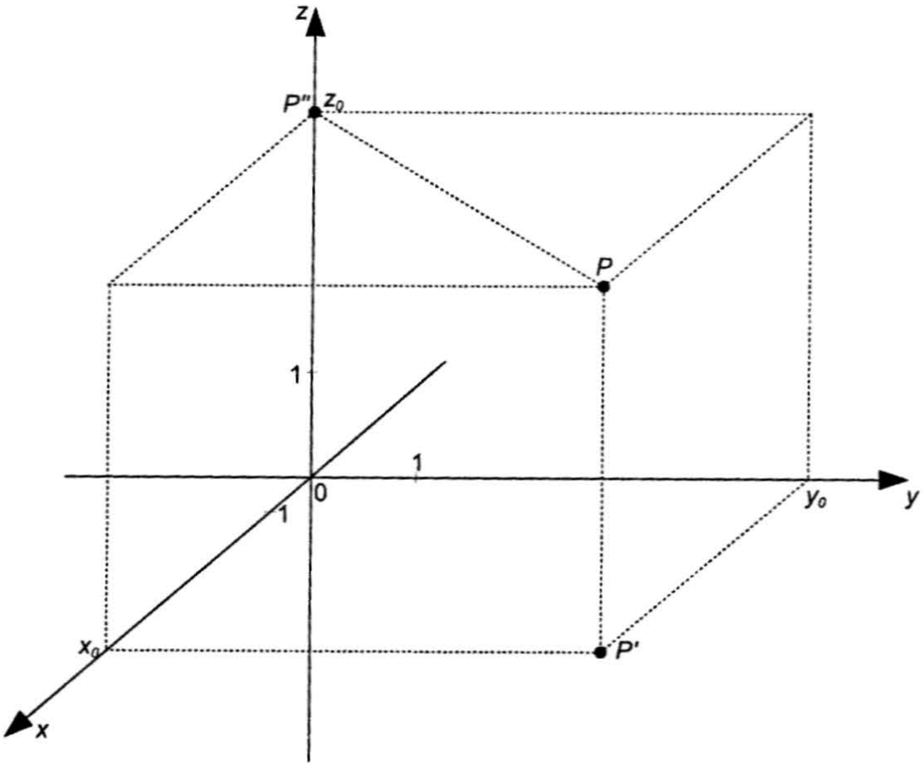
Definicja 1.38. *Przestrzeń z zadanym w niej prostokątnym układem współrzędnych nazywać będziemy przestrzenią kartezjańską.*

Na rysunku 1.2 przedstawione są dwa różne układy współrzędnych w przestrzeni. Pierwszy z nich nazywamy *zorientowanym dodatnio*, zaś drugi — *zorientowanym ujemnie*. Metodę rozróżniania tych układów nazywamy *zasadą śruby prawoskrętnej*. Wyobraźmy sobie, że chcemy śrubę z prawym gwintem wkręcić prostopadle do płaszczyzny Oxy. Obracamy nią w taki sposób, aby punkt na jej łbie znajdujący się początkowo nad dodatnią półosią osi Ox po obrocie o kąt prosty znalazł się nad dodatnią półosią osi Oy.



Rys. 1.2

Jeżeli przy wkręcaniu śruba przesuwa się zgodnie ze zwrotem osi Oz, to układ jest zorientowany dodatnio. W przeciwnym wypadku — jest zorientowany ujemnie. W dalszym ciągu najczęściej będziemy posługiwać się układem zorientowanym dodatnio.



Rys. 1.3

Załóżmy, że w przestrzeni dany jest prostokątny układ współrzędnych i P jest punktem tej przestrzeni. Punktowi P potrafimy w sposób jednoznaczny przyporządkować trójkę uporządkowaną liczb rzeczywistych. Mianowicie, przez punkt P prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny Oxy. W przecięciu z tą płaszczyzną otrzymujemy punkt P', którego współrzędnymi w płaszczyźnie Oxy są (x_0, y_0). Następnie przez punkt P prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do osi Oz. W przecięciu z tą osią otrzymujemy punkt P'', którego współrzędna na osi Oz wynosi z_0. Otrzymaliśmy w ten sposób uporządkowaną trójkę liczb (x_0, y_0, z_0), które nazywać będziemy *współrzędnymi punktu* P i będziemy pisać $P(x_0, y_0, z_0)$ (rys. 1.3). Łatwo widać, że jeżeli dana jest uporządkowana trójka liczb rzeczywistych (x_0, y_0, z_0), to odpowiada jej jedyny punkt P przestrzeni kartezjańskiej o współrzędnych (x_0, y_0, z_0). Zatem mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami przestrzeni kartezjańskiej a trójkami uporządkowanymi liczb rzeczywistych, czyli elementami zbioru $\mathbb{R}^3$. Możemy więc utożsamiać przestrzeń kartezjańską z $\mathbb{R}^3$ i oznaczać ją tym symbolem.