SPIS TREŚCI

ZAMIAST WSTĘPU

Dark side of the moon – najsłynniejsza płyta rockowa. Utwory grupy Pink Floyd składające się w monumentalny, przenikający szczerością album od 30 lat łączą pokolenia dzieci i rodziców, wspólnie słuchających muzyki. Zainspirowany tekstami, ośmieliłem się strawestować tytuł płyty tak, by zachęcić nie tylko fanów muzyki do spotkania z matematyką.

Matematyka i muzyka to moje dwie pasje. Wydaje się, że przenikają się wzajemnie, są obecne w każdej, codziennej chwili życia. Wyznaczają rytm i tempo naszych działań, sumują doświadczenia, analizują sukcesy, a czasami mnożą porażki.

Książka, którą Czytelniku trzymasz w ręku, zawiera kilkanaście przykładów obecności matematyki w naszym życiu codziennym. Każdy rozdział poprzedzony jest fragmentem utworów z *Dark side of the moon*, które szczególnie pasują do poruszanych tematów. Serdecznie zapraszam do lektury, a na początek proponuję kilka krótkich matematycznych wycieczek w krainę alfabetu, liczb, historii i absurdu. Mam nadzieję, że opowiastki te zachęcą Cię do łaskawszego spojrzenia na matematykę.

1. Alfabetyczny spis liczb

Poniżej wypisuję, w pewnym porządku, liczby naturalne nie większe od stu.

40, 44, 42, 49, 41, 48, 45, 47, 46, 43, 14, 4, 2, 20, 24, 22, 29, 21, 28, 25, 27, 26, 23, 12, 9, 90, 94, 92, 99, 91, 98, 95, 97, 96, 93, 19, 10, 1, 11, 8, 80, 84, 82, 89, 81, 88, 85, 87, 86, 83, 18, 5, 50, 54, 52, 59, 51, 58, 55, 57, 56, 53, 15, 7, 70, 74, 72, 79, 71, 78, 75, 77, 76, 73, 17, 16, 6, 60, 64, 62, 69, 61, 68, 65, 67, 66, 63, 100, 3, 30, 34, 32, 39, 31, 38, 35, 37, 36, 33, 13

Po krótkiej analizie listy można dojść do wniosku, że kryterium wyboru, które zadecydowało o takiej kolejności liczb był alfabet. Liczby są ułożone w kolejności alfabetycznej. Pierwszą liczbą na liście jest 40 (czterdzieści), zaś ostatnią jest 13 (trzynaście). Zauważmy, że pierwszą z liczb jednocyfrowych wypisywanych w kolejności alfabetycznej jest 4 (cztery), zaś ostatnią 3 (trzy).

Kilka uwag, które warto poczynić w związku ze spisem.
Otóż:

a) Liczby o najmniejszej liczbie liter to 2 i 100 (po 3);
b) Liczba o największej liczbie liter to 99 (24 litery);

c) Najmniejsza liczba wypowiedziana jedną sylabą to 2, największa to 100;
d) Najmniejsza liczba wypowiedziana dwiema sylabami to 1, największa to 10;
e) Najmniejsza liczba wypowiedziana trzema sylabami to 12, największa to 60;
f) Najmniejsza liczba wypowiedziana czterema sylabami to 11, największa to 90;
g) Najmniejsza liczba wypowiedziana pięcioma sylabami to 21, największa to 96;
h) Najmniejsza liczba wypowiedziana sześcioma sylabami to 71, największa to 99;
i) Nie ma liczb wypowiadanych z użyciem większej liczby sylab niż 6.

Zauważmy, że pomijając liczbę 1, ilość sylab potrzebna na wypowiedzenie danej liczby jest zawsze mniejsza od wartości tej liczby. Prowadzi to do następującego wniosku:

Biorąc dowolną liczbę naturalną *n*, licząc sylaby potrzebne na jej wypowiedzenie i powtarzając operację, dojdziemy zawsze do pętli składającej się z 2 i 1.

Na przykład startując z liczbą 997 (*dziewięćset dziewięćdziesiąt siedem*), otrzymamy ciąg:
997 (dziewięćset dziewięćdziesiąt siedem → 9 sylab), 9 (dziewięć → 2 sylaby), 2 (dwa → 1 sylaba), 1 (jeden → 2 sylaby) 2, 1, 2,… Zatem otrzymujemy ciąg: 997, 9, (2, 1).

Gdy zaczniemy z liczbą np. 19715, otrzymamy ciąg: 19715, 13, 3, (1, 2). Liczba 223 generuje natomiast ciąg: 223, 6, 1, 2, (1, 2). 666 wyznacza natomiast: 666, 6, 1, 2, (1, 2).

Z podobnych powodów, jeśli powyższe operacje powtórzymy dla liczby liter, zamiast sylab, potrzebnych na zapisanie danej liczy, to otrzymamy ciąg kończący się pętlą (5, 4, 6). Zobaczmy:
997 generuje ciąg: 997, 33, 15, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)
19715 daje: 19715, 40, 11, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)
223 daje 223, 21, 11, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)
666 wyznacza 666, 26, 16, 10, 8, 5, 6, 4, (5, 4, 6)

Gdy język polski zamienimy na angielski, wówczas lista alfabetyczna liczb naturalnych nie większych od 100 będzie wyglądać następująco:

8, 18, 80, 85, 84, 89, 81, 87, 86, 83, 82, 11, 50, 58, 55, 54, 59, 51, 57, 56, 53, 52, 5, 15, 4, 14, 40, 48, 45, 44, 49, 41, 47, 46, 43, 42, 100, 9, 19, 90, 19, 98, 95, 94, 99, 91, 97, 96, 93, 92, 1, 7, 17, 70, 78, 75, 74, 79, 71, 74, 76, 73, 72, 6, 16, 60, 68, 65, 64, 69, 61, 67, 66, 63, 62, 10, 13, 30, 38, 35, 34, 39, 31, 37, 36, 33, 32, 3, 12, 20, 28, 25, 24, 29, 21, 27, 26, 23, 22, 2.

Jedyną liczbą, która zarówno w spisie polskim, jak i angielskim znajduje się na tej samej pozycji jest 3. Zachęcam do podobnych „badań” nad spisem angielskim.

Zauważmy ponadto, że w języku angielskim ciąg liter wyznaczających liczby zawsze kończy się liczbą 4. Wyjaśnienie jest bardzo proste. Oznaczając przez L(n) liczbę liter potrzebnych na wypowiedzenie danej liczby naturalnej w języku angielskim, otrzymamy:
$L(1) = 3$, $L(2) = 3$, $L(3) = 5$, $L(4) = 4$ i $L(n) < n$ dla $n > 4$. Zatem ciąg liter wyznaczających liczby kończy się liczbą 4.
999 generuje: 999, 22, 9, 4, (4)
19715 daje: 19715, 35, 10, 3, 5, 4, (4)
223 wyznacza: 223, 15, 7, 5, 4, (4)
666 daje: 666, 18, 9, 4, (4)

Czytelnik poliglota może z łatwością zaobserwować podobne pętle pojawiające się w innych językach. Kolejną ciekawostką związaną z alfabetycznym spisem liczb naturalnych jest następująca obserwacja: wypisując kolejno liczby naturalne, używając ich zapisu w języku angielskim, pierwsze *a* pojawiłoby się dopiero przy liczbie 1000 (thousand)!

2. Klub z selekcją

Stoimy przed eleganckim klubem, obserwując wchodzących klientów. Osoba przeprowadzająca selekcję podaje każdemu pewną liczbę, po czym oczekuje odpowiedzi. Jeżeli jest ona zgodna z ustalonym kodem, to wówczas selekcjoner pozwala klientowi na wejście do klubu. W przeciwnym wypadku selekcjoner dziękuje klientowi za fatygę i zamyka przed nim drzwi klubu. Z zainteresowaniem obserwujemy kolejnych wchodzących do klubu gości. Pierwszy z nich na liczbę „9” podaną przez selekcjonera odpowiedział „8”, kolejny na „11” podał odpowiedź „10”, następni na „7” i „5” poprawnie podali odpowiedzi „6” i „4”. Pewni naszej przenikliwości ustawiamy się w kolejce i na podaną liczbę „8” odpowiadamy „7”. Ku naszemu zdumieniu, nie wpuszczono nas, podczas gdy osoba stojąca przed nami na „6” odpowiedziała „5” i została z uśmiechem zaproszona do wejścia. By jeszcze bardziej poczuć się zdezorientowanym okazuje się, że na „3” poprawną odpowiedzią jest „4” a nie „2”. Zastanawiamy się, jaką regułą posługuje się selekcjoner.

Oczywiście mając na uwadze poprzedni fragment rozdziału poświęcony alfabetycznemu spisowi liczb oraz rozważaniom dotyczącym ilości sylab i liter potrzebnych na wyrażenie kolejnych liczb, zauważamy, że regułą jest liczba liter potrzebnych na wyrażenie danej liczby.
9 – (dziewięć) daje 8, 11 – (jedenaście) daje 10. Natomiast poprawną odpowiedzią na 3 – (trzy) jest 4.

3. Liczby największe

Zaproponujmy następującą zabawę:
Liczymy litery potrzebne na opisanie kolejnych liczb naturalnych. Zamiast 2 (dwa) możemy na przykład powiedzieć: *Najmniejsza liczba pierwsza.* Wówczas wyrazimy 2 (dwa) przez 7 sylab. Trójkę możemy wyrazić jako: *liczba, która wygląda jak prawa połowa ósemki ciętej wzdłuż.* W tym wypadku wyrażamy 3 przez 19 sylab.
Zastanówmy się nad znalezieniem największej liczby wypowiedzianej przez 16 sylab.
Otóż po chwili namysłu dojdziemy do wniosku, że:
Największa liczba wypowiedziana przez 16 sylab to: *Największa liczba wypowiedziana przez 16 sylab*, gdyż zdanie to ma dokładnie 16 sylab i opisuje największą liczbę wypowiedzianą przez 16 sylab.
Z kolei, szukamy największej liczby wypowiedzianej przez mniej niż 90 sylab. I tu spotyka nas niespodzianka. Zdanie: *Największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab,* ma 19 sylab, czyli ono samo opisuje tę liczbę. Zatem proponujemy, aby kandydatem na największą liczbę wypowiedzianą przez mniej niż 19 sylab była właśnie największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab. I tutaj czeka nas pełne zaskoczenie:
Chociażby zdanie: *Największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab powiększona o 10,* ma również mniej niż 90 sylab i opisuje liczbę większą od największej wypowiedzianej przez mniej niż 90 sylab. Zatem… taka liczba nie istnieje.

4. Znikająca siódemka

Proszę spojrzeć na następujący ciąg liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.
Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma w nim 7. Po wnikliwej analizie kolejnych wyrazów tego ciągu dochodzimy do wniosku, że w ciągu tym nie występuje 7. Przepisując kilkanaście razy ten ciąg, cały czas nie zauważamy obecności 7 w tym ciągu. Wydaje się, że 7 nie ma w tym ciągu.

Ale na miłość Boską dlaczego?!

5. Liczby ciekawe

Każdy z nas ma jakieś ulubione liczby naturalne. Liczby te są z nami związane poprzez pewne zdarzenia z naszego życia, zatem są niewątpliwie liczbami ciekawymi. Załóżmy, że wszyscy nasi znajomi wypisują swoje ulubione liczby naturalne, a następnie konstruujemy sumę tych zbiorów. Powstanie zbiór liczb ciekawych, który jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych posiada element najmniejszy. Zatem możemy znaleźć najmniejszy element w zbiorze liczb ciekawych. Odejmując od niego jeden, otrzymamy największą całkowitą liczbę nieciekawą. I to już jest naprawdę ciekawe!

6. Never odd or even

Zdanie powyższe jest sensowne i poprawne. Zachowuje identyczny kształt czytane zarówno od początku, jak i od końca. Zdania takie nazywamy *palindromami*. Kolejne przykłady takich zdań w języku angielskim to:
Devil Lived
Madam I'm Adam
Najbardziej znani polscy twórcy palindromów to Stanisław Barańczak, Józef Godzic i Tadeusz Morawski.
Najbardziej znane polskie palindromy to pochodzący z XIX w. nieznanego autorstwa:
Kobyła ma mały bok
I co idioci (Józef Godzic)
Ada goła mało gada (Tadeusz Morawski)
I lali masoni wydrom w mordy wino, sami lali (Stanisław Barańczak)

Także liczba 112211 przedstawia taką samą wartość, gdy zapiszemy ją w odwrotnej kolejności. Liczby o tej własności, podobnie jak zdania, również nazywamy *palindromami.*
Zauważmy, że każdy palindrom o parzystej liczbie cyfr:

$a_{2n-1}10^{2n-1}+a_{2n-2}10^{2n-2}+\cdots+a_2 10^2+a_1 10+a_0$ jest podzielny przez 11.

Rzeczywiście suma:

$a_0-a_1+a_2+\cdots+a_{2n-2}-a_{2n-1}=0,$ gdyż $a_0=a_{2n-1}, a_1=a_{2n-2}, a_2=a_{2n-3}$ itd,

co zgodnie z cechą podzielności przez 11 wskazuje, że liczba:

$a_{2n-1}10^{2n-1}+a_{2n-2}10^{2n-2}+\cdots+a_2 10^2+a_1 10+a_0$ jest wielokrotnością 11.

Zauważmy, że palindromów liczbowych jest nieskończenie wiele.
Chociażby kwadrat każdej liczby typu 10^n+1 dla n = 0, 1, 2… jest palindromem typu 100…00000..001.
Oprócz tego zauważmy, że palindromy możemy tworzyć dokonując następujących mnożeń:
$11\cdot 11=121,$ $111\cdot 111=123321,$ $1111\cdot 1111=1234321,$
$11111\cdot 11111=123454321,$ $111111\cdot 111111=12345654321$ itp.

Gdy weźmiemy pod uwagę liczbę naturalną N, to jeśli sama nie jest palindromem, możemy skonstruować z liczby N palindrom, używając następującego algorytmu: Odwracamy kolejność cyfr w liczbie N, tworząc w ten sposób liczbę $\underline{N}$. Dodajemy je do siebie. Jeśli suma jest palindromem, to operację przerywamy. W przypadku gdy $S = N + \underline{N}$ nie jest palindromem, powtarzamy czynności dla $N = S$.

Przykładowo:

49 + 94 = 143, 143 + 341 = **484** (potrzebne były 2 sumowania)

86 + 68 = 154, 154 + 451 = 605, 605 + 506 = **1111** (potrzebne były 3 sumowania)

69 + 96 = 165, 165 + 561 = 726, 726 + 627 = 1353, 1353 + 3531 = **4884** (4 sumowania).

Dla liczb 98 i 89 palindrom uzyskujemy dopiero po wykonaniu 24 sum. Otrzymamy palindrom to **8813200023188.**

Liczba 739 produkuje palindrom **5233333325** po wykonaniu 17 sum.

Procedura ta, stosowana do liczby 196, po przeszło dwu milionach dodawań wciąż nie dawała palindromu. W 2006 roku ogłoszono, że po prawie 750 milionach dodawań otrzymano liczbę z przeszło 300 milionami cyfr wciąż niebędącą palindromem.

Oprócz liczby 196 znane są jeszcze 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, które dotychczas, po wielomilionowych dodawaniach nie dały palindromu.

Kwestia, czy procedura ta zawsze skończy się palindromem pozostaje wciąż otwarta.

W literaturze matematycznej to zagadnienie nazywamy *Hipotezą 196.*

7. Zabawa z kalendarzem

Ten trick jest konsekwencją prostej obserwacji dotyczącej układu zapisu dni miesiąca na każdym ściennym kalendarzu. Prosimy ochotnika o zakreślenie w dowolnym miesiącu kwadratu składającego się z 16 dat.

Po wykonaniu tej czynności będzie miał przed sobą tablicę złożoną z następujących liczb:

x	x + 1	x + 2	x + 3
x + 7	x + 8	x + 9	x + 10
x + 14	x + 15	x + 16	x + 17
x + 21	x + 22	x + 23	x + 24

Następnie prosimy go o wybranie dowolnego dnia miesiąca (zapisanie liczby oznaczającej ten dzień na osobnej kartce), skreślenie dat znajdujących się w tym wierszu i kolumnie gdzie znajduje się wybrana data. Dalej wybiera inny dzień spośród nieskreślonych (zapisuje również tę liczbę) i jak poprzednio skreśla cały wiersz i kolumnę, w której znajduje się kolejna wybrana przez niego data. Operację powtarza jeszcze raz. Po wybraniu trzech dni i skreśleniu

odpowiednich kolumn i wierszy pomagamy mu zauważyć, że pozostaje tylko jeden dzień nieskreślony w całym kwadracie. Prosimy o zapisanie na kartce tej jedynej nieskreślonej daty. Ostatecznie prosimy ochotnika o obliczenie sumy czterech liczb znajdujących się na kartce.
Ku jego zdumieniu okaże się, że suma ta została już dawno przez nas napisana na osobnej kartce, która cały czas leżała na stole.
Tajemnica tej sztuczki jest bardzo prosta. Wybierając w opisany sposób daty z kalendarza, dostajemy ciąg czterech wartości pochodzących z różnych kolumn i wierszy macierzy.
Za każdym razem suma tych wartości równa się sumie liczb z głównej przekątnej, czyli $4x + 48$.
W praktyce, aby poznać sumę, wystarczy krótki rzut oka na wybrany kwadrat dat, by dodać do siebie skrajne wartości (x oraz $x + 24$), a potem pomnożyć wynik przez 2.

8. Orły i reszki

Przedstawię obecnie bardzo prostą, ale jakże zdumiewającą sztuczkę z monetami.

Na stole znajduje się 12 monet. 5 z nich jest odwróconych reszką ku górze, a pozostałe 7 jest zwrócone orłami ku górze. Wykonawca twierdzi, że z zawiązanymi oczami podzieli zbiór monet na dwa zbiory, takie że w każdym z nich będzie taka sama liczba monet zwróconych reszkami ku górze. Oczywiście wykonawca nie zna początkowego układu monet na stole.
Sztuczkę przeprowadzamy w sposób następujący:
Podchodzimy do stołu i rozdzielamy monety na dwa zbiory tak, aby w jednym było 7, a w drugim 5 elementów. Następnie monety w mniejszym zbiorze odwracamy na stronę przeciwną.
Prześledźmy, co jest efektem takiego działania.
Niech w zbiorze 7 monet znajdowało się k-reszek, wówczas w zbiorze 5-elementowym znajdować się musiało 5-k reszek (czyli k-orłów). Przewracając na stronę przeciwną monety w mniejszym zbiorze, otrzymamy w nim: 5-k orłów i k-reszek.

Cel został osiągnięty!

9. Liczba demoniczna

Apokalipsa według św. Jana w części poświęconej losom Kościoła zawiera fragment dotyczący Fałszywego Proroka – Bestii, której nazwa ukryta jest w następujących słowach:
Tu jest potrzebna mądrość, Kto ma rozum niech liczbę Bestii policzy, liczba to bowiem człowieka. A liczba jego: ***sześćset sześćdziesiąt sześć.***

Zatem liczba 666 symbolizuje diabła, który wciela się w człowieka opisanego w jakiś sposób tą liczbą. Liczbę tę w kulturze masowej zdecydowanie spopularyzował film *Omen* z 1976 roku. Horror ten opowiada o adoptowanym dziecku, które okazuje się potomkiem szatana. Nieświadomi rodzice wychowują chłopca, nie zwracając uwagi na jego niezwykłe zdolności. Damien – bo takie było imię chłopca, miał na głowie wyraźną bliznę w kształcie liczby 666. Podczas pracy nad filmem realizatorów prześladowały nieszczęścia: scenarzysta został porażony przez piorun, hotel gdzie mieszkała ekipa został uszkodzony przez bombę podłożoną przez IRA, Gregory Peck – grający główną rolę w ostatniej chwili przesunął swój wylot z planu filmowego i nie odleciał samolotem, który się doszczętnie rozbił w chwili startu. Przez wiele lat *Omen* w światowym rankingu kina, prowadzonym przez największy serwis filmowy IMDB, był notowany na miejscu 666. Remake filmu *Omen*, powstały w roku 2006, miał swoją premierę 6.06. Od lat eksperci od numerologii starają się odszyfrować osobę zaklętą w liczbie 666. Najpopularniejsze teorie wskazują, że Bestią jest Neron, gdyż przypisując literom tworzącym słowa: NERON CAESAR wartości numeryczne dostaniemy sumę 666.
Używając różnych formuł numerologicznych, udało się przypisać wartość 666 następującym osobom i zjawiskom: Adolf Hitler, Marcin Luter, Józef Stalin, Saddam Husajn, Napoleon, papiestwo, internet, faszyzm i wielu innym.

Chciałbym przedstawić w tym miejscu kilka algebraicznych ciekawostek dotyczących tej niezwykłej liczby.

1) Otóż w zapisie rzymskim 666 wygląda następująco: DCLXVI.
Zawiera wszystkie znaki oznaczające liczby poniżej 1000 ustawione w porządku malejącym:
D (500), C (100), L (50), X (10), V (5), I (1).
2) 666 jest 36. *liczbą trójkątną*. Liczby trójkątne T_n są postaci: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Oznacza to, że liczba trójkątna T_n jest sumą kolejnych *n* liczb naturalnych. Zatem 666 jest sumą kolejnych 36 liczb naturalnych: $666 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 35 + 36$. Przy okazji, 666 jest sumą liczb z koła klasycznej ruletki.
3) 666 jest *repdigitem*, czyli liczbą składającą się z powtarzających się cyfr. Repdigit to skrót od *repeated digit*. 666 to największa liczba trójkątna, która jest repdigitem.
4) 666 jest 52. *apokaliptyczną potęgą*. Tak mówimy na każdą liczbę naturalną *n*, dla której potęga 2^n ma w swym zapisie dziesiętnym trzy powtarzające się cyfry 6.
Pierwszą apokaliptyczną potęgą jest 157.
5) 666 jest 140. kolejną *liczbą praktyczną*. Liczba praktyczna to taka liczba naturalna, dla której wszystkie liczby naturalne mniejsze od niej dają się zapisać jako suma dzielników tej liczby.

Przykładowo: 16 jest liczbą praktyczną, jej podzielnikami są 1, 2, 4, 8, 16. Mamy również: $3 = 1 + 2$, $5 = 4 + 1$, $6 = 4 + 2$, $7 = 4 + 2 + 1$, $9 = 8 + 1$, $10 = 8 + 2$, $11 = 8 + 2 + 1$, $12 = 8 + 4$, $13 = 8 + 4 + 1$, $14 = 8 + 4 + 2$, $15 = 8 + 4 + 2 + 1$.

6) 666 można zapisać w sposób następujący:

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

$$666 = 3^6 - 2^6 + 1^6$$

$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$$

7) 666 jest również sumą kwadratów pierwszych siedmiu liczb pierwszych:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 =$$
$$= 4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 + 289$$

8) Suma cyfr 666 wynosi 18. Suma cyfr rozkładu tej liczby na czynniki pierwsze również wynosi 18. Rzeczywiście: $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$; $2 + 3 + 3 + 3 + 7 = 18$. Liczby o takiej własności nazywamy *liczbami Smitha*.

666 jest 34. elementem ciągu liczb Smitha.

Pojęcie liczb Smitha wprowadził do literatury matematycznej w 2004 roku Albert Wilansky, który zauważył, że numer telefonu jego szwagra Harolda Smitha 493 7775, po rozłożeniu na czynniki pierwsze $4937775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65837$ posiada własność, że suma cyfr numeru telefonu jest taka sama jak suma cyfr czynników pierwszych tej liczby: $4 + 9 + 3 + 7 + 7 + 7 + 5 = 42 = 3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7$

9) Dwie kolejne palindromiczne liczby pierwsze: 313 oraz 353 sumują się do 666.

10) Niestrudzeni badacze własności tej liczby odkryli, że sumy cyfr liczb: 666^{47} oraz 666^{51} są jednakowe i wynoszą jakżeby inaczej 666.

11) Kolejną charakterystyczną własnością tej liczby jest sumowalność sześcianów cyfr jej kwadratu i cyfr sześcianu.

Otóż: $666^2 = 443556, 666^3 = 295408296$

Dalej: $4^3 + 4^3 + 3^3 + 5^3 + 5^3 + 6^3 + 2 + 9 + 5 + 4 + 0 + 8 + 2 + 9 + 6 = 666$

12) Gdy pomiędzy cyfry 123456789 wstawimy odpowiednio znaki +, to możemy skonstruować liczbę 666 dwoma sposobami:

$1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9 = 666$

Jeśli odwrócimy kolejność cyfr, otrzymamy 666 tylko w jeden sposób. Mianowicie:

$$9 + 87 + 6 + 543 + 21 = 666$$

13) Liczby: 216, 630, 666 stanowią jedną z trójek Pitagorejskich, co oznacza, że:

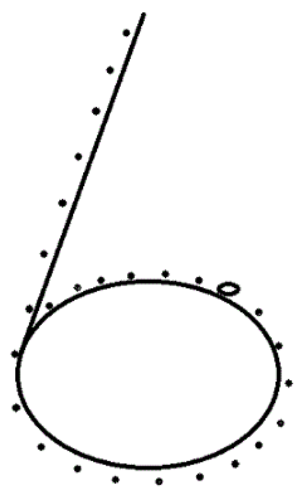
$$216^2 + 630^2 = 666^2$$

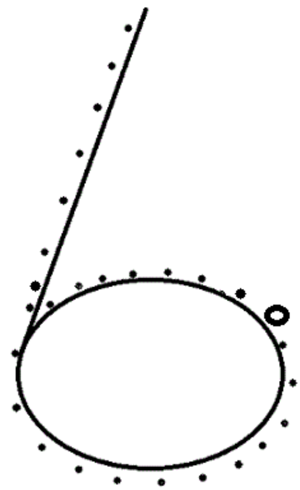
Można tę równość zapisać inaczej, jako:

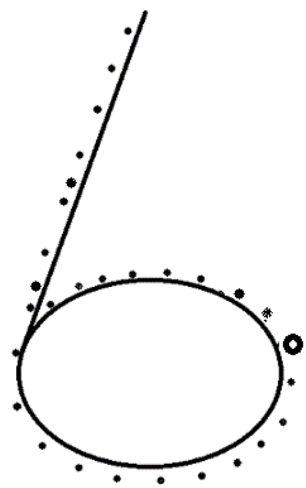
$$(6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2 = 666^2$$

Dla mnie liczba 666 zawsze będzie kojarzyła się z poniższym trickiem.

Konstruujemy planszę z zapisaną na niej liczbą 666. Ogonek pierwszej szóstki składa się z 7 punktów, drugiej szóstki z ośmiu, a ostatniej szóstki z dziewięciu punktów. Brzuszek każdej szóstki składa się z 20 elementów. W brzuszku każdej szóstki wyróżniamy jeden element. Jeśli części składowe szóstek są dla przykładu punktami, niech ten element będzie oznaczony kółkiem. W pierwszej szóstce jest to siódmy element na prawo począwszy od połączenia ogonka z brzuszkiem, w drugiej jest to ósmy, a w trzeciej dziewiąty element po prawej stronie liczony od połączenia ogonka z brzuszkiem.
Prosimy dowolną osobę o pomyślenie dowolnych trzech liczb całkowitych tak by pierwsza była większa od 7, druga od 8, a trzecia od 9.
Prosimy o odliczenie tylu elementów każdej z szóstek ile wynosi pomyślana liczba, zaczynając od końca ogonka i poruszając się po brzuszku przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Gdy dojdziemy do ostatniego elementu prosimy o kolejne odliczenie tylu elementów ile wynosiła pomyślana liczba. Poruszamy się tym razem zgodnie z ruchem wskazówek zegara, licząc od elementu, na którym skończyliśmy i nie wychodzimy poza brzuszek.
Za każdym razem liczenie zakończy się na wyróżnionym elemencie.







Ostatnia zabawa związana z 666 przebiega w sposób następujący:

Oznajmiamy, że każdy z nas, być może nieświadomie, ale kryje w sobie element demoniczny i jest związany z diabelską liczbą. Prosimy osoby, które chcą wziąć udział w zabawie o pomyślenie ulubionej liczby trzycyfrowej (może być związana z datą urodzenia danej osoby) N – niebędącej palindromem (tzn. nie typu aba) i wykonanie następujących czynności:

a) odwrócenie kolejności cyfr w tej liczbie tak by powstała liczba M,
b) od większej z nich odjęcie mniejszej, czyli M – N = S albo N – M = S,
c) w otrzymanej sumie S odwrócenie cyfr. W ten sposób powstaje liczba Z,
d) obliczenie sumy S + Z = A,
e) dodanie do siebie cyfr A. W ten sposób powstaje B,
f) pomnożenie B przez 2 i do wyniku dodanie 1; otrzymujemy C,
g) wykonanie mnożenia BC.

Wynik ostatniego działania zawsze będzie równy 666!

Zanim wytłumaczymy działanie tego tricku prześledźmy jak działa na konkretnych przykładach.

Bierzemy liczbę 578:

a) 875
b) 875 – 578 = 297 = S
c) 792 = Z
d) 792 + 297 = 1089 = A
e) 1 + 0 + 8 + 9 = 18 = B
f) 2 · 18 + 1 = 37 = C
g) 18 · 37 = 666

Bierzemy 123:

a) 321
b) 321 – 123 = 198 = S
c) 891 = Z
d) 891 + 198 = 1089 = A
e) 1 + 0 + 8 + 9 = 18 = B
f) $2 \cdot 18 + 1 = 37 = C$
g) $18 \cdot 37 = 666$

Sekretem powodzenia tej sztuczki jest fakt, że liczba A zawsze będzie równa 1089. Suma jej cyfr wynosi 18. Następnie $18 \cdot (2 \cdot 18 + 1) = 18 \cdot 37 = 666$. Udowodnijmy zatem kluczowy fragment sztuczki.

Niech wybraną liczbą będzie abc czyli $100a + 10b + c$. Liczba powstała przez przestawienie cyfr to: cba czyli $100c + 10b + a$. Bez zmniejszenia ogólności zagadnienia załóżmy, że a > c.

Mamy zatem: $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c =$
$$99a + a - a - 99c - c + c = 100a - 100c - a + c =$$
$$= 100(a - c) - a + c = 100(a - c - 1) + 90 + 10 - (a - c)$$
bo a > c.

Następnie:

$$100[10-(a-c)]+90+a-c-1+100(a-c-1)+90+10-(a-c)=100\cdot 9+180+9=1089!$$

Liczba 1089 jest również niezwykle ciekawa. Gdy odwrócimy kolejność cyfr otrzymamy liczbę 9801, która daje się zapisać jako $9\cdot 1089$, czyli jest wielokrotnością oryginalnej liczby. 1089 jest najmniejszą liczbą o tej własności. Kolejną liczbą jest 2178, dla której $8712=4\cdot 2178$. Uwaga! $2178=2\cdot 1089$!

Zauważmy, jeszcze, że:

$$1089\cdot 1=1089$$
$$1089\cdot 2=2178$$
$$1089\cdot 3=3267$$
$$1089\cdot 4=4356$$
$$1089\cdot 5=5445$$
$$1089\cdot 6=6534$$
$$1089\cdot 7=7623$$
$$1089\cdot 8=8712$$

oraz jak pamiętamy: $1089\cdot 9=9801$

Zauważmy, że wyniki pierwszego i ostatniego iloczynu są swoimi lustrzanymi odbiciami. To samo można zaobserwować dla wyniku mnożenia drugiego i przedostatniego, trzeciego i trzeciego od końca itd.

10. System binarny

Kolejny drobiazg z kategorii ciekawych zastosowań matematyki w realiach spotkania towarzyskiego wykorzystuje zapis binarny liczb naturalnych. Rekwizytami są 4 karty z wypisanymi na nich następującymi liczbami.

1)

8	9	10	11
12	13	14	15

2)

4	5	6	7
12	13	14	15

3)

2	3	6	7
10	11	14	15

4)

1	3	5	7
9	11	13	15

Prosimy ochotnika o wybranie jednej spośród tych, które są przedstawione na kartach i wskazanie, na których kartach się znajduje. Po otrzymaniu tej informacji dodajemy do siebie lewe górne wartości tych kart, na których pojawiła się pomyślana przez ochotnika liczba i podajemy wynik.
Gdy pomyślano np. 7; dostajemy informację, że znajduje się ona na kartach: 2, 3, 4. Dodając lewe górne wartości: 4 + 2 + 1 otrzymujemy wynik: 7.
Zauważmy, że każda liczba naturalna z przedziału [1, 15] daje się zapisać w systemie binarnym jako $a_1a_2a_3a_4$ gdzie wartości $a_i \in \{0,1\}$ i =1, 2, 3, 4. Otrzymując informację, na których kartach umieszczona jest wybrana liczba, wiemy, gdzie występują jedynki w jej zapisie binarnym.
Dla 7 mamy: $0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7$ czyli $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$.

11. Koniec świata jest blisko

Obecnie na świecie żyje ponad 7 miliardów ludzi. Problemem zaludnienia naszej planety zajmuje się *Population Reference Bureau (PRB)* z siedzibą w Waszyngtonie. Liczbę mieszkańców Ziemi zaczęto szacować, przyjmując za początkową datę rok 50000 p.n.e., gdyż wtedy na naszej planecie pojawił się Homo Sapiens. Według danych PRB Ziemię dotychczas zamieszkiwało około 107 miliardów ludzi. Zatem na każdą żyjącą obecnie osobę przypada powyżej 15 zmarłych.
Gdyby każdej urodzonej na Ziemi osobie przyporządkować liczbę związaną z kolejnością jej narodzin to obecnie żyjący mieliby numery porządkowe około 107 miliardów. Gdyby ludzkość rozwijała się w takim tempie jak dotychczas, nasze numery porządkowe byłyby raczej małe w porównaniu z numerami tych, którzy jeszcze nadejdą.
Pokażemy jednak, że nasze numery porządkowe są na dosyć wysokich pozycjach, co jak nam się uda dowieść, wskazuje na wcześniejsze nadejście końca świata niż byśmy się spodziewali.

Najpierw chwila dygresji.
Wyobraźmy sobie dwie loterie. *Mała* loteria z dziesięcioma losami i *Duża* loteria, gdzie jest 1000 losów. Losy w każdej loterii wyglądają identycznie, są małymi karteczkami z numerem. Wybieramy w sposób dowolny jedną z loterii i kupujemy jeden los. Powiedzmy, że przypada nam los z numerem 7. Obliczymy prawdopodobieństwo, że los ten pochodzi z *Małe*j loterii.
Niech M – oznacza zdarzenie, że mamy do czynienia z loterią *Małą,* natomiast przez D oznaczymy zdarzenie, że mamy do czynienia z loterią *Dużą*.
Mamy: $p(M) = p(D) = \frac{1}{2}$.
Prawdopodobieństwo wylosowania numeru 7 z *Małe*j loterii wynosi:

$$p(7/M) = \frac{1}{10}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania numeru 7 z *Dużej* loterii wynosi:

$$p(7/D) = \frac{1}{1000}$$

Ostatecznie obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, że los pochodzi z loterii *Małej*, wiedząc że jest to los z numerem 7.
Dostajemy:

$$p(M/7) = \frac{P(M \cap 7)}{P(7)} = \frac{P(7/M) \cdot P(M)}{P(7/M) \cdot P(M) + P(7/D) \cdot P(D)} =$$
$$= \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.001 \cdot 0.5} = \frac{0.05}{0.0505} = 0.990099$$

Zatem mając w ręku los z numerem 7, jest wielce prawdopodobne, że pochodzi on z loterii *Małej*.

Zajmiemy się obecnie zagadnieniem rychłego nadejścia Końca Świata.

Mamy dwie koncepcje Dnia Zagłady.

Pierwsza – dosyć pesymistyczna, że koniec świata jest bliski. Szacuje się, że około 2075 roku liczba ludności przekroczy 9.5 miliarda. Według niektórych prognoz Ziemia nie przetrwa takiego przeludnienia. Liczba osób żyjących na Ziemi do tego czasu, licząc od daty początkowej (50000 p.n.e.), wzrośnie do 110 miliardów.

Druga koncepcja Końca Świata jest łagodniejsza. Szacuje się, że przed nadejściem Dnia Zagłady liczba osób żyjących kiedykolwiek na Ziemi osiągnie wartość około 10 bilionów (10000 miliardów).

Obecnie, przez analogię z loteriami *Małą* – Koniec Świata jest bliski i *Dużą* – Koniec Świata jest odległy, my, żyjący obecnie mamy przyporządkowane liczby o wartości około 107 miliardów. Zatem z ogromnym prawdopodobieństwem (przeszło 99%) pochodzimy z loterii *Małej*. Zatem Koniec Świata jest bardzo bliski.

12. Czy można przewidzieć we śnie śmierć bliskiej osoby

Według psychologów przeciętny człowiek każdej nocy śni 5 różnych snów, a zapamiętuje średnio co dziesiąty z nich. W Polsce żyje obecnie 38.5 miliona ludzi, z czego 85% to osoby powyżej 15 lat. Zatem osoby niebędące dziećmi śnią w roku: $0.85 \cdot 38500000 \cdot 5 \cdot 365 = 59723125000$ snów. Liczba zapamiętanych snów przez dorosłych Polaków wynosi w roku 5972312500 (prawie 6 miliardów snów). Z drugiej strony socjolodzy twierdzą, że dorosła osoba zna średnio około 150 innych osób (rodzina, znajomi, kontakty z pracy). Oznacza, to, że dorośli Polacy, w liczbie $0.85 \cdot 38500000 = 31025000$ osób, tworzą sieć $31025000 \cdot \frac{150}{2} = 2326875000$ (około 2.3 miliarda) osobistych

znajomości pomiędzy sobą. Oczywiście, w snach przewijają się znajomi, rodzina, osoby z którymi jesteśmy związani. Zauważmy, że sieć powiązań sennych jest gęstsza od sieci znajomości. Wynika to chociażby z faktu, że jeśli osoba A śni o osobie B to wcale nie oznacza to, że B śni o osobie A. Z kolei sieć znajomości jest symetryczna, tzn. zakłada się, że osoby A i B znają się wzajemnie.
Zatem sieć połączeń sennych wielokrotnie pokrywa sieć powiązań interpersonalnych. Niektóre połączenia występują więcej niż raz.
Obecnie w Polsce współczynnik zgonów wynosi 0.01, co oznacza około 385000 zgonów rocznie. Osoby te w sieci znajomości tworzą podsieć o $385000 \cdot \frac{150}{2} = 28875000$ połączeniach.

Jest zatem niezaprzeczalne stwierdzenie, że wśród prawie 6 miliardów rocznie zapamiętanych snów znajdą się sny o niektórych z 385 tysięcy osób, które w danym roku umrą. Jak widać z porównania liczb powiązań sennych, zdarzenie takie musi zajść wielokrotnie.

Dlatego trudno jest naprawdę dziwić się, że ktoś wyśnił, czy przewidział, śmierć bliskiej osoby. Takie zdarzenia muszą mieć miejsce i nie są niczym nadzwyczajnym, tylko konsekwencją chociażby tzw. *zasady szufladkowej Dirichleta* (sieć snów pokrywa wielokrotnie sieć znajomości, a w szczególności podsieć wytworzoną przez osoby zmarłe).

13. Józef Ignacy Kraszewski

Józef Ignacy Kraszewski (1812-1887) pozostaje najpłodniejszym polskim pisarzem. W jego dorobku znajdujemy 232 powieści, liczne felietony, zbiory wierszy i opowiadania. Za swe dokonania został wpisany do Księgi rekordów Guinnessa jako twórca o największym dorobku literackim. Ostatnio został zdetronizowany przez brazylijskiego pisarza powieści brukowych Ryoki Inoue. Inoue opublikował do 2013 roku ponad 1080 książek.

Jaki mamy powód, aby przypominać Kraszewskiego w książce poświęconej zastosowaniom matematyki. Otóż Kraszewski jest polskim odpowiednikiem Szekspira w wersji słynnego twierdzenia o małpach przy klawiaturze. Rezultat, o którym za chwilę napiszemy zawdzięczamy francuskiemu matematykowi

Emilowi Borelowi (1871-1956). Borel zajmował się teorią miary i prawdopodobieństwem. Będąc w sile wieku poślubił 17-letnią córkę swojego kolegi, również matematyka. Kolejnym z mało znanych faktów jego biografii jest zamiłowanie do hazardu i próby opisania matematycznego modelu gry w pokera podejmowane w latach 1936-1938.

W 1913 roku Borel sformułował twierdzenie o tzw. *nieskończonej małpie*. Gdyby małpa wystarczająco długo siedziała przy klawiaturze maszyny do pisania, uderzając w klawisze to „prawie na pewno” w ciągu znaków, który powstanie w ten

sposób znajdziemy dowolny z góry wybrany tekst. Jako przykład Borel podał zbiór dzieł Szekspira.
My postaramy się wykazać, że gdy siedząca przy klawiaturze komputera małpa wystarczająco długo stukać będzie w klawisze, to w powstałym ciągu znaków pojawi się tekst wszystkich dzieł Józefa Ignacego Kraszewskiego.
Wprowadźmy zatem odpowiednie oznaczenia i przystąpmy do pracy. Na klawiaturze niech dostępnych będzie K znaków. Oczywiście, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że znak o numerze j, pokryje się ze znakiem stojącym na j-tej pozycji w ciągu znaków dzieł Kraszewskiego wynosi $\frac{1}{K}$. Wszystkie dzieła Kraszewskiego tworzą ciąg znaków Kr. Znaki, które powstają dzięki małpie podzielmy na kawałki Kr1, Kr2, Kr3,… Każdy z nich niech składa się z Kr znaków. Prawdopodobieństwo, że ciąg Kr1 pokryje się z ciągiem znaków wszystkich dzieł Kraszewskiego wynosi: $\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}$
Prawdopodobieństwo, że ciąg znaków Kr1, nie pokryje się z ciągiem znaków odpowiadającym dziełom Kraszewskiego wynosi: $1-\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}$.
Weźmy obecnie pod uwagę Z kolejnych ciągów znaków Kr1, Kr2, Kr3,…, KrZ powstałych przez naciskanie klawiszy komputera przez małpę. Znaki te powstają w sposób niezależny.
Zatem prawdopodobieństwo, że w łańcuchu Z kolejnych ciągów Kr1, Kr2, Kr3, …, KrZ żaden z nich nie będzie odpowiadał dziełom Kraszewskiego wynosi:

$$\left(1-\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^{Z}$$

Prawdopodobieństwo, że choć jeden z ciągów Kr1, Kr2, Kr3,…, KrZ pokryje się z dziełami Kraszewskiego wynosi:

$$1-\left(1-\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^{Z}$$

Zakładając, że małpa siedzi przy klawiaturze, produkując znaki wystarczająco długo to możemy założyć, że ciąg znaków dąży do nieskończoności i wobec tego, mamy:
Prawdopodobieństwo, że choć jeden z ciągów Kr1, Kr2, Kr3, ... , KrZ pokryje się z dziełami Kraszewskiego wynosi:

$$\lim_{Z\to\infty}\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^{Z}\right)$$

Z uwagi na fakt, że K > 1, powyższa granica wynosi 1.

Aby uwiarygodnić nasze obliczenia przyjmijmy, że średnio książka składa się z 360000 znaków (tak przyjmują wydawnictwa). Zatem zawartość wszystkich dzieł Kraszewskiego to w uproszczeniu ciąg $200\cdot 360000 = 7{,}2\cdot 10^{7}$ znaków.

Przyjmijmy dalej, że na klawiaturze jest około 40 znaków do wyboru. Wtedy $K^{Kr} = 40^{7,2\cdot 10^7} \approx 10^{11,52\cdot 10^7}$. Z elementarnej teorii prawdopodobieństwa pamiętamy, że w przypadku schematu Bernoulliego (n – niezależnych prób, p – prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu) średnia liczba prób, jakie należy przeprowadzić do pojawienia się pierwszego sukcesu wynosi $\frac{1}{p}$. Zatem należy wystukać $K^{Kr} = 40^{7,2\cdot 10^7}$ łańcuchów ciągów znaków aby pojawił się pierwszy ciąg odpowiadający dziełom Kraszewskiego. Odbędzie się to po wystukaniu $Kr \cdot K^{Kr} = 7,2 \cdot 10^7 \cdot 10^{11,52\cdot 10^7} = 7,2 \cdot 10^{115200007}$ znaków.
Niech małpa wystukuje około 1000 znaków na sekundę. Wówczas spodziewane dzieło Kraszewskiego stworzone przez małpę nastąpi po: $7,2 \cdot 10^{115200004}$ sekundach od chwili rozpoczęcia eksperymentu. Na rok składają $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 36531536000 \approx 10^{7,5}$ sekundy.
Zatem pierwsze kompletny zbiór dzieł Kraszewskiego powstanie po $7,2 \cdot 10^{115199996,5}$ latach. Jak wiadomo przyjmuje się wiek Ziemi na $4,6 \cdot 10^7$ lat. Zatem otrzymamy dzieła Kraszewskiego w skończonym czasie, tylko zapewne do tego momentu i małp zabraknie, i komputer się zepsuje.
Na zakończenie, nie bądźmy w stosunku do małpy już tak wymagający. Zastanówmy się jak długo czekalibyśmy do chwili pojawienia się słowa MATEMATYKA – wypisanego przez małpę. W tym przypadku $K^{Kr} = 40^{10} \approx 10^{16}$. Następnie $Kr \cdot K^{Kr} = 10 \cdot 10^{16} = 10^{17}$. Zakładając raz jeszcze, że szybkopisząca małpa stawia 1000 znaków na sekundę, słowo MATEMATYKA pojawi się na ekranie komputera po 10^{14} sekundach, czyli po $10^{6,5}$ latach. Będziemy czekać niewiele krócej od wieku Ziemi.

Niech te rozważania z pogranicza absurdu i matematyki rekreacyjnej będą dobrym pretekstem do zwrócenia uwagi Czytelnika na czasami nie całkiem poważny charakter poruszanych w tej książce tematów.

Używając języka Matematyki, mamy przywilej opisania pewnych zjawisk tak, by wyglądały na dużo groźniejsze i poważniejsze niż są w rzeczywistości. Z drugiej strony o zagadnieniach bardzo złożonych i ważkich można pisać w sposób nieskomplikowany i oby zrozumiały. W tym tkwi niedoceniana potęga Matematyki. Dzięki niej możemy zrozumieć wiele zjawisk otaczającego nas świata. Jednocześnie, jak nie bardzo wiemy co powiedzieć na dany temat, wówczas manipulując wzorami i używając żargonu symboli matematycznych możemy z łatwością zamaskować swoją ignorancję. Zarówno tego pierwszego, jak i drugiego wykorzystania Matematyki życzę życzliwym Czytelnikom i zostawiam pod rozwagę, czy Autor tej książeczki wie, o czym pisze, czy tylko starannie tuszuje swoje niekompetencje w gąszczu aksjomatów, lematów i twierdzeń.

Dalsze rozdziały tej książki poświęcone będą niektórym aspektom codziennego funkcjonowania Wyższej Uczelni – egzaminy, sesja, wizyty w dziekanacie. Przyjrzę się również różnym sposobom wyboru dziekanów i, ośmielony, w dalszym rozdziale opiszę historię pewnych konklawe.

Trochę z osobistych pobudek zajmę się również obecnością Matematyki w sądzie – jak bardzo błędne wnioski można wyciągać z zeznań przy braku znajomości elementarnych praw Matematyki. Aby złagodzić wydźwięk tych rozważań, poruszę temat praw Murphy'ego, które przekonują nas, że jeśli istnieje nawet małe prawdopodobieństwo, iż coś się nie uda, to z pewnością się nie uda. Spróbuję wyjaśnić ich działanie z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa. Zajmę się również problemem konfliktów partnerskich.
Aby nie psuć humoru Czytelnikom opisem potyczek rodzinnych, wrócę do czasów dzieciństwa, kiedy cały otaczający nas świat był życzliwy, lata i zimy były niezapomniane, a przyjaźnie wyjątkowe.
Na zakończenie skoro nic tak nie przekonuje do Matematyki jak udane przykłady i zastosowania, przedstawię jak wykorzystać wiedzę matematyczną w sztuczkach *magicznych*. Opiszę, wraz z wyjaśnieniem ich działania, pewne towarzyskie gry i zabawy, które zawierają w sobie elementy matematyki. Są łatwe w zastosowaniu i szczerze zachęcam do stosowania ich w praktyce.

Jestem pracownikiem Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej, związanym z międzywydziałowym Centrum Kształcenia Międzynarodowego, zatem w pewnych okolicznościach, dla zwiększenia dramaturgii zdarzeń, wprowadzę do swoich opowieści rzeczywiste miejsca, studentów i postaci z życia akademickiego.

Na zakończenie wstępu, aby wprowadzić Czytelnika w nastrój odpowiadający intencjom autora tej książeczki, proszę przyjrzeć się tym zdaniom:

1) Matematyka jest piękna.
2) Oba zdania są fałszywe.

Zdanie drugie jest albo prawdziwe albo fałszywe.

a) Jeśli jest prawdziwe, to obydwa zdania są fałszywe. W szczególności drugie zdanie też jest fałszywe, co powoduje, że zdanie pierwsze musi być prawdziwe. Zatem *Matematyka jest piękna.*
b) Jeśli zdanie drugie jest fałszywe, to natychmiast dostaniemy, że jest to możliwe wówczas, gdy pierwsze zdanie jest prawdziwe.
   Zatem:

Matematyka jest piękna.

Życzę udanej lektury.

Dziękuję za pomoc i liczne cenne uwagi Dyrektorowi Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej, doc. dr. Andrzejowi Justowi.