SPIS TREŚCI

DODATEK

PRZEDMOWA

Niniejsza książka stanowi rozszerzenie i modyfikację podręczników pt. „Mechanika" i „Mechanika techniczna" mojego autorstwa wydanych przez WNT, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, Warszawa, w latach 2007 i 2009.

Prowadzone na bazie wspomnianych podręczników wykłady i ćwiczenia na Wydziale Mechanicznym na kierunkach „Mechatronika" i „Transport" oraz na studiach doktoranckich z „Mechaniki" wpłynęły na wychwycenie niektórych z nieścisłości i wprowadzenie stosownych poprawek do tekstu tej książki.

Wprowadzenie kilku zupełnie nowych rozdziałów i znaczne modyfikacje już istniejących spowodowało ukierunkowanie tej książki do studentów, doktorantów i pracowników naukowych wyższych uczelni technicznych.

Uzupełnienie tej książki stanowi podręcznik/monografia pt. „Mechanika techniczna i stosowana. Dynamika".

Obydwie te pozycje o charakterze podręcznika i monografii mają stanowić kompendium wiedzy dotyczącej mechaniki klasycznej z uwypukleniem jej nowych gałęzi rozwoju, co w zamierzeniu powinno ożywić mechanikę i wzmocnić zainteresowanie nią wśród szerokiej rzeszy Czytelników, a w tym głównie inżynierów. W książkach skoncentrowano się na prezentacji szerokiego wachlarza prostych i złożonych problemów w ujęciu wektorowym i przestrzeganiu jednolitego matematycznie zorientowanego podejścia do opisu i wyjaśnienia wielu nawet złożonych i często zupełnie nowych działów mechaniki klasycznej. Stanowią one wyraz konsekwentnego dążenia autora do połączenia mechaniki technicznej zorientowanej inżyniersko z mechaniką klasyczną wykładaną na wydziałach fizyki i matematyki stosowanej.

Ponadto w obydwu książkach starałem się zawrzeć krótkie opisy charakteryzujące wielkie postacie matematyki i mechaniki, których nazwiska pojawiają się w tekście. Celem takiego podejścia było uwypuklenie rysów historycznych rozwoju mechaniki i wskazanie na istotną rolę jej drugiego (oprócz formalnego matematycznego) humanistycznego oblicza.

Praktyka dydaktyczna autora oraz trudności z modyfikacją nauczania matematyki skierowanej na potrzeby inżynierskie doprowadziły do powstania „Dodatku", w którym przedstawiono wiedzę w „pigułce" związaną z rachunkiem wektorowym i macierzowym wykorzystywanym w tej książce.

W rozdziale 1 wprowadzono szereg podstawowych pojęć i praw stosowanych w mechanice, a w szczególności zasadę d'Alemberta i zasadę prac przygotowanych, które są następnie wykorzystywane w dalszych rozdziałach książki. Na uwagę zasługuje p. 1.4 poświęcony zagadnieniom przemieszczeń rzeczywistych, wirtualnych i wariacji funkcji.

Rozdział 2 dotyczy wybranych zagadnień statyki, ze szczególnym uwypukleniem geometrycznych warunków równowagi (wieloboku sznurowego) oraz redukcji przestrzennego układu sił. Ponadto obszerną część tego rozdziału stanowi problematyka związana z klasycznym rozumieniem tarcia i jego modelowaniem. Wprowadzono w nim wiele nowych twierdzeń i definicji, a na uwagę zasługuje podrozdział poświęcony oddziaływaniom mechanicznym, więzom i podporom. Tematyka podrozdziału, dotyczącego redukcji przestrzennego układu sił do dwóch sił skośnych, należy do rzadko opisywanej w literaturze polskiej związanej z mechaniką. Na uwagę zasługują podrozdział zatytułowany „Tarcie a ruch względny" oraz podrozdział dotyczący tarcia cięgien opasujących walec o przekroju kołowym.

Rozdział 3 stanowi obszerne opracowanie dotyczące tzw. geometrii mas. Po wprowadzeniu pojęć podstawowych i momentów II rzędu wiele uwagi poświęcono macierzy bezwładności i jej transformacjom. Opisano również zagadnienia związane z tensorem bezwładności, osiami głównymi i elipsoidą bezwładności. Ta ostatnia problematyka została przedstawiona bardziej formalnie w stosunku do materiału przedstawianego w klasycznych podręcznikach z mechaniki ogólnej.

Ponadto wprowadzono zupełnie nowe podrozdziały w stosunku do wymienionych wcześniej książek wydanych przez WNT, takie jak p. 3.5 pt. „Własności głównych i głównych centralnych osi bezwładności" oraz p. 3.6 pt. „Wyznaczanie momentów bezwładności ciała sztywnego".

W rozdziale 4 autor rozważa zagadnienia dotyczące kinematyki punktu. W p. 4.1÷4.3 opisano ruch punktu w płaszczyźnie, ruch prostoliniowy oraz ruch krzywoliniowy w płaszczyźnie. W p. 4.4 opisano ruch jednostajny po okręgu i po prostej w ujęciu wektorowym. Następnie wprowadzono pojęcie promienia wodzącego oraz współrzędnych prostokątnych i krzywoliniowych w przestrzeni. Znacznie szerzej w stosunku do klasycznych podręczników z mechaniki opisano problematykę związaną ze współrzędnymi normalnymi. Zostały wprowadzone i rozszerzone pewne pojęcia z rachunku tensorowego oraz bazy kowariantne i kontrawariantne, co wykracza poza klasyczne opracowanie z mechaniki ogólnej. Ponadto rozdział ten został wzbogacony o podrozdział dotyczący kinematyki łańcuchów kinematycznych i stosowanej w niej notacji Denavita-Hartenberga, co otwiera nowe możliwości zastosowań mechaniki klasycznej, zwłaszcza w robotyce i teorii manipulatorów. Rozdział kończy opis i klasyfikacja problemów kinematyki.

Rozdział 5 dotyczący kinematyki ciała sztywnego należy do najbardziej obszernych rozdziałów tej książki. Rozdział ten zawiera trzy zmodyfikowane i poprawione podrozdziały pt. „Metody wektorowe w kinematyce ruchu płaskiego", „Ruch płaski złożony punktu" i „Ruch złożony ciała sztywnego". Opisano w nim szczegółowo zagadnienia ruchu postępowego i obrotowego ciała sztywnego, jego ruch płaski i ruch w przestrzeni oraz ruch kulisty ciała sztywnego. Szczególną uwagę w tym rozdziale zwrócono na wprowadzone kąty Eulera i kinematyczne równania Eulera. Podano również wiele twierdzeń (i często również ich dowody) związanych z przemieszczeniem i obrotem ciała sztywnego. Rozdział ten uwypukla interpretację geometryczną mechaniki i pokazuje zalety wykorzystywania rachunku wektorowego.

Rozdział 6 obejmuje kinematykę ciała odkształcalnego. W p. 6.1 opisano rolę i znaczenie tensorów w mechanice, a w p. 6.2 szczegółowo opisano tensor naprężeń oraz podstawowe elementy rachunku tensorowego oraz wskazano na potrzebę jego stosowania w mechanice, zwłaszcza w zagadnieniach statycznie niewyznaczalnych.

Książkę kończy „Dodatek" obejmujący podstawowe wiadomości z rachunku wektorowego i macierzowego.

Wyrażam głębokie podziękowanie dr. Krzysztofowi Januszkiewiczowi za bardzo rzetelne sprawdzenie tekstu i wychwycenie wielu uchybień i pomyłek. Dziękuję również mgr. Markowi Kaźmierczakowi za pomoc przy składaniu tekstu i wiele uwag krytycznych prowadzących w efekcie do poprawy przekazu treści tej książki.

Autor

Rozdział 1

PODSTAWY MECHANIKI

1.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Mechanika stanowi jeden z działów fizyki. Arystoteles[1] należy do pierwszych uczonych, który wprowadził pojęcie *mechanika*. Początkowo rozwój mechaniki był związany z rozwojem wiedzy dotyczącej modelowania wszechświata, a w tym ruchów planet. Platon[2], Eudoksos[3] i Arystoteles należą do twórców układu *stref homocentrycznych* (ludzkość zajmuje w nich centralne miejsce), natomiast Apoloniusz[4], Hipparchos[5] i Ptolemeusz[6] byli twórcami układu *epicyklicznego*. Teoria przez nich rozwinięta, gdzie nieruchoma Ziemia była ośrodkiem Wszechświata, zwana jest *geocentryczną*.

Jak wspomniano, twórcą tej teorii był Ptolemeusz, uczony aleksandryjski, który oparł się na pracach Hipparchosa, jednego z największych astronomów starożytności. Ten ostatni złożoność ruchu planet przy zachowaniu centralnego położenia Ziemi wyjaśnił poprzez wprowadzenie kombinacji ruchów kołowych.

Teoria geocentryczna bazuje na założeniu, że nieruchoma Ziemia jest położona w środku wszechświata, a wokół Ziemi krążą pozostałe

---

[1] Arystoteles (384-322 p.n.e.), wielki filozof grecki (uczeń Platona).
[2] Platon (428-348 p.n.e.), grecki filozof i matematyk.
[3] Eudoksos z Knidos (408-355 p.n.e.), grecki filozof, matematyk i astronom.
[4] Apoloniusz z Pergi (260-190 p.n.e.), astronom i matematyk grecki (zajmował się krzywymi stożkowymi i badaniem ruchu Księżyca).
[5] Hipparchos z Nikei (190-120 p.n.e.), astronom matematyk i geograf grecki uważany za prekursora naukowych podstaw astronomii.
[6] Klaudiusz Ptolemeusz (100-168), matematyk, astronom i geograf grecki; jeden z twórców poglądu geocentrycznego.

ciała niebieskie w kształcie kul poruszających się jednostajnie po orbitach kołowych.

Arystoteles, będący niepodważalnym autorytetem w dziedzinie filozofii i mechaniki, popełnił jednak zasadniczy błąd, który niekorzystnie wpłynął na rozwój mechaniki, gdyż zakładał, że prawa określające ruch ciał na Ziemi są inne niż prawa ruchu ciał niebieskich. Dopiero Galileusz[7] przeszło dwadzieścia wieków później wskazał na błędność poglądów Arystotelesa.

Model *heliocentryczny*, w którym Słońce jest środkiem świata, został wprowadzony przez Mikołaja Kopernika[8] w jego fundamentalnym dziele „De revolutionibus orbium coelestium". Pogląd ten został następnie zmodyfikowany przez Giordano Bruno[9]. Uważał on, że układ słoneczny jest jedynie jednym z nieskończenie wielu takich układów we wszechświecie.

Problemy związane z ruchem ciał zostały po raz pierwszy wysunięte na plan pierwszy przez Galileo Galilei zwanego Galileuszem. Galileusz był gorącym zwolennikiem poglądu Kopernika i jemu przypisuje się odkrycie prawa ruchu wahadła (1583) oraz prawa swobodnego spadania ciał (1602).

Ogromny wkład do rozwoju mechaniki włożył Johannes Kepler[10] (1571-1630). Sformułował on trzy następujące prawa ruchu planet w oparciu o obserwacje empiryczne wcześniej poczynione przez Tychona Brahego[11]:

1. Każda planeta porusza się po eliptycznej orbicie leżącej w stałej płaszczyźnie przechodzącej przez Słońce znajdujące się w jednym z ognisk elipsy.
2. Promień wodzący dowolnej planety, zaczepiony w ognisku orbity eliptycznej w miejscu, gdzie znajduje się Słońce, zakreśla w jednakowym czasie wycinki o jednakowej powierzchni.
3. Kwadraty okresów obiegu planet są proporcjonalne do sześcianów ich średnich odległości od Słońca.

---

[7] Galileusz (1564-1642), włoski filozof, astronom, astrolog i fizyk; potwierdził teorię heliocentryczną Kopernika.
[8] Mikołaj Kopernik (1473-1543), polski astronom i matematyk; twórca teorii heliocentrycznej.
[9] Giordano Bruno (1548-1600), włoski duchowny katolicki, filozof.
[10] Johanes Kepler (1571-1630), niemiecki matematyk, astronom i fizyk.
[11] Tycho Brahe (1546-1601), astronom duński.

Prawa Keplera stanowiły podwaliny dla mechaniki Isaaca Newtona[12]. Newton założył, że przestrzeń jest jednorodna i izotropowa, a zjawiska są jednorodne ze względu na wybór chwili czasu. Wyprowadzone przez Newtona równania są niezmiennicze względem transformacji Galileusza. Klasyczna mechanika nazywana jest *mechaniką niutonowską*.

Mechanikę można również zdefiniować jako *naukę o ruchu ciał*. Mechanika zamiast obiektów rzeczywistych posługuje się ich *modelami*. Ogólnie rzecz biorąc, model danego obiektu (ciała) jest obrazem odzwierciedlającym jego cechy ważne przy badaniu istotnych dla danej nauki zjawisk. Do podstawowych modeli stosowanych w mechanice należą:

Punkt materialny – ciało o wymiarach tak małych, że może być uważane za punkt w sensie geometrycznym, ale posiadający masę. Należy tu jednak podkreślić, że w praktyce za punkt materialny przyjmuje się ciała bez względu na ich wymiary geometryczne, których prędkości kątowe są z założenia zerowe lub wykonywany ruch obrotowy może być pominięty.

Układ punktów materialnych – zbiór punktów materialnych.

Ciało sztywne – jest to taki obiekt materialny, w którym odległości pomiędzy jego elementami pozostają niezmienione pod działaniem dowolnie dużych sił.

Układ ciał sztywnych – zbiór ciał sztywnych.

Wprowadzone przez Newtona prawa mechaniki służą do badania ruchów układów materialnych. Umożliwiają one stworzenie *modelu matematycznego*, czyli sformułowanie *równań ruchu* punktów materialnych.

Głównym celem mechaniki jest sformułowanie praw ruchu umożliwiających badanie różnorodnych ciał rzeczywistych. Okazuje się bowiem, że każdy obiekt materialny rzeczywisty, tj. stały, ciekły lub gazowy, może być zamodelowany jako zbiór punktów materialnych. Problematyką tą zajmują się następujące działy mechaniki:

(i) *mechanika ciał odkształcalnych* (wytrzymałość materiałów, teoria sprężystości, teoria plastyczności czy reologia);
(ii) *mechanika płynów* (hydromechanika);
(iii) *mechanika gazów* (aeromechanika).

W mechanice technicznej podczas procesu modelowania mamy do czynienia z geometrią (rozkładem) mas i opisem materiałów z których zbudowane są ciała. W mechanice ciała sztywnego zakłada się, że odległości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami ciała nie ulegają zmianie.

[12] Isaac Newton (1642-1727), angielski fizyk, matematyk, filozof i astronom.

Z zupełnie innym zagadnieniem mamy do czynienia wówczas, gdy możliwa będzie zmiana odległości pomiędzy punktami ciał. Obciążenie ciał w tym ostatnim przypadku prowadzi do zmiany odległości pomiędzy atomami ciała, a siły międzyatomowe (wewnętrzne) będą równoważyć obciążenie zewnętrzne. Ciała i układy materialne zbudowane z metalu spotykane w technice posiadają regularne struktury ułożonych siatek atomów w ilości 10^{30}. Ze względu na tak dużą ilość atomów analizy dokonuje się w skali mikro, co prowadzi do uśrednienia różnokierunkowości układu mikrokryształów. Ogólnie rzecz biorąc, większość materiałów technicznych po wycięciu z nich prostopadłościanu o bokach rzędu 10^{-3} m posiada takie same własności bez względu na orientację „wycinania" i takie materiały nazywamy *izotropowymi* (równokierunkowymi). Istnieją również w technice materiały *anizotropowe* (różnokierunkowe), których własności wytrzymałościowe zależą od orientacji wycinania kostki materiału (np. blachy walcowane, drewno, tkaniny, papier, itd.).

Oryginalnie sformułowane przez Newtona prawa wygenerowały zbiór innych podstawowych praw mechaniki, takich jak prawo zmienności pędu, prawo zmienności krętu, czy też prawo zmienności energii kinetycznej.

Poniżej podamy sformułowane przez Newtona prawa obowiązujące dla punktu materialnego.

I. Punkt materialny niepodlegający działaniu żadnej siły lub będący pod wpływem sił znajdujących się w równowadze pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.
II. Przyspieszenie punktu materialnego posiada wartość proporcjonalną do wartości siły działającej na ten punkt i posiada kierunek i zwrot tej siły.
III. Siły wywierane na siebie przez dwa punkty materialne są równe co do wartości i są skierowane wzdłuż prostej łączącej te punkty, ale posiadają przeciwne zwroty.

Pierwsze dwa prawa są prawdziwe w układzie inercjalnym, podczas gdy prawo trzecie obowiązuje w układzie dowolnym.

Zauważmy, że prawa Newtona oparte są na pojęciu *siły*, która jest wielkością wektorową. Siła występuje tu jako pojęcie pierwotne i wymaga wprowadzenia co najmniej dwóch ciał. Wzajemność oddziaływań między ciałami wynika z III prawa Newtona, gdzie działanie akcji (siły) wywołuje natychmiastowe działanie reakcji, co obrazowo charakteryzuje opis podany przez I. Newtona: „*Jeżeli naciskam palcem na kamień z pewną siłą, to kamień też naciska na mój palec z taką samą siłą*". Oddziaływanie wzajemne ciał może być realizowane poprzez nacisk bezpośredni jednego ciała na drugie lub też poprzez oddziaływanie pośrednie na odległość.

Ten drugi przypadek wiąże się z prawem powszechnego ciążenia, bowiem jeśli mamy dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2, to siła grawitacyjna $\mathbf{F}_{12}$, z jaką punkt o masie m_2 przyciąga punkt materialny o masie m_1, wynosi

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}_{12}, \tag{1.1}$$

gdzie $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$, a $\mathbf{r}_{12}$ jest wektorem łączącym te dwa punkty i skierowanym od punktu 1 do 2.

Stała grawitacji G służy do opisu *pola grawitacyjnego* i została wyznaczona po raz pierwszy przez H. Cavendisha[13].

Należy zwrócić uwagę na pewną dowolność w określeniu siły. Laureat nagrody Nobla R. Feynman[14] zwraca uwagę, że ścisła definicja siły jest trudna. Wynika to z faktu przybliżonego charakteru drugiego prawa Newtona oraz generalnie z przybliżonego charakteru praw fizyki.

Pojęcie masy może być wprowadzone przy oparciu się na drugim prawie Newtona. Rozważmy dowolnie wybrany punkt materialny i przykładajmy do niego kolejno siły o różnych wartościach: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_N$. Każda z sił spowoduje ruch punktu materialnego odpowiednio z przyspieszeniami: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_N$. Przyspieszenia te, zgodnie z drugim prawem Newtona, są proporcjonalne do wartości tych sił, tj. mamy

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{p}_1} = \frac{\mathbf{F}_2}{\mathbf{p}_2} = \frac{\mathbf{F}_3}{\mathbf{p}_3} = \ldots = \frac{\mathbf{F}_N}{\mathbf{p}_N}. \tag{1.2}$$

Stosunki te charakteryzują *bezwładność* (inercję) ciała (punktu materialnego) i określają *masę* ciała. Przypomnijmy, że na Ziemi *ciężar* ciała jest iloczynem masy ciała *m* i przyspieszenia ziemskiego **g**. Masę zdefiniowaną w ten sposób nazywamy *masą grawitacyjną*. Badania empiryczne, które przeprowadził fizyk węgierski Roland Eötvös[15] wykazały, że masa *bezwładna* (określająca bezwładność punktu materialnego) i *grawitacyjna* (będąca miarą grawitacji) są identyczne.

[13] Henry Cavendish (1731-1810), brytyjski fizyk i chemik.
[14] Richard Feynman (1918-1988), amerykański fizyk i twórca elektrodynamiki kwantowej.
[15] Roland Eötvös (1848-1919), węgierski matematyk i fizyk.

Drugie prawo Newtona może być zatem sformułowane w postaci

$$m\mathbf{p} = \mathbf{F}. \tag{1.3}$$

Trzecie prawo Newtona zwane jest również *prawem akcji i reakcji*. Jest ono obowiązujące zarówno dla ciał stykających się ze sobą, jak i oddziałujących na siebie z pewnej odległości $(\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21})$.

Zauważmy na koniec, że prawa Newtona są już podane w wersji zmodyfikowanej. Oryginalny tekst Newtona pochodzący z jego dzieła z roku 1687 „Philosophiae naturalis principia mathematica" („Matematyczne zasady filozofii") jest nieco inny. Na przykład Newton nie stosuje pojęcia punktu, ale ciała. Pojęcie siły zostało przez niego określone poprzez szereg aksjomatów, a nie w zapisie wektorowym.

Warto podkreślić, że pojęcie siły, historycznie rzecz biorąc, stanowiło pojęcie subiektywne, bo wiązało się ono z subiektywnym odczuciem wysiłku mięśni. Dzięki pracom naukowym Newtona i innych uczonych pojęcie siły nabrało charakteru obiektywnego. Obecnie obserwuje się nawet pewne sprzężenie zwrotne, tzn. poprzez obiektywne rozumienie siły naukowcy pragną w pełni zgłębić tzw. biologiczne pojęcie siły wiążące się ze zdolnością układu nerwowo-mięśniowego do np. podnoszenia (opuszczania) ciał materialnych [1]. W tym przypadku „siła" zależy od własności włókien mięśniowych wolno- i szybkokurczliwych, wieku, płci, itd.

Ogólnie rzecz biorąc, możemy wyróżnić następujące rodzaje sił:

(i) Masowe (grawitacyjne i bezwładnościowe);
(ii) Powierzchniowe i objętościowe (ciśnienie i ciśnienie hydrostatyczne);
(iii) Elektromagnetyczne i elektrostatyczne;
(iv) Mięśni (ludzi i zwierząt);
(v) Kontaktowe (stykowe) działające na powierzchni lub wzdłuż linii, o charakterze ściskania;
(vi) Rozciągające (naciągowe), takie jak siły w niciach, linach, cięgnach, itd.;
(vii) Bierne (reakcyjne), tzn. przeciwstawiające się siłom czynnym;
(viii) Zewnętrzne i wewnętrzne;
(ix) Wzajemnego oddziaływania ciał.

Możliwe jest, oprócz opisanych praw, wprowadzenie różnych *zasad* mechaniki. O ile prawa opisują związki pomiędzy wielkościami mechanicznymi, prowadząc często do rozwiązań (np. poprzez całki pierwsze *pędu, krętu* czy *energii*), to zasady służą jedynie do układania równań ruchu. Te ostatnie posiadają walor ogólności, bowiem mogą być stosowane np. w teorii względności, mechanice kwantowej i niektórych działach fizyki. Można je podzielić na *zasady różniczkowe i całkowe*. Zasady stosowane w mechanice klasycznej należą do tzw. *mechaniki analitycznej.*

Uogólnienie drugiego prawa Newtona stanowi *zasada niezależności działania sił*. Jeśli na rozważany punkt materialny działa wiele sił, to przyspieszenie tego punktu jest sumą geometryczną przyspieszeń pochodzących od każdej siły działającej osobno (zasada superpozycji).

Przypomnijmy wreszcie, że pojawienie się równań Maxwella[16], opisujących zachowanie się pól elektromagnetycznych, nie dało się pogodzić z koncepcją ruchu cząsteczek Newtona. Okazało się bowiem, że fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się w próżni. Przeczy to podejściu czysto mechanistycznemu, że fale mogą rozchodzić się jedynie w ośrodku materialnym wypełniającym przestrzeń. Ponadto równania Maxwella były niezmiennicze ze względu na transformację Lorentza[17], podczas gdy równania Newtona wykazują niezmienniczość względem transformacji Galileusza.

Powstały problem udało się rozwiązać Albertowi Einsteinowi[18], po wprowadzeniu tzw. szczególnej teorii względności w roku 1905. Einstein wprowadził czasoprzestrzeń jako wielkość *inwariantną* (niezmienniczą), tworząc podwaliny tzw. mechaniki *relatywistycznej*. W ten sposób zunifikowane zostały dwa systemy dedukcyjne, tj. mechanika i elektrodynamika (mechanika relatywistyczna podobnie jak elektrodynamika są niezmiennicze względem transformacji Lorentza).

Na szczęście różnice pomiędzy mechaniką relatywistyczną i mechaniką Newtona pojawiają się przy prędkościach punktów materialnych bliskich prędkości światła i przy analizie bardzo dużych odległości, co nie będzie przedmiotem naszych rozważań.

Zamieszczony powyżej krótki rys historyczny rozwoju mechaniki wskazuje na jej głębokie korzenie jeszcze w czasach starożytnych i Czytelnik nie popełni omyłki, podejrzewając, że obecnie w obszarze nawet mechaniki ogólnej istnieje bardzo dużo podręczników i monografii. W tej książce świadomie zrezygnowano jednak z ich cytowania, a zamieszczono jedynie pozycje, z których autor korzystał podczas pisania

[16] James Clerk Maxwell (1831-1879), matematyk i fizyk szkocki.
[17] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), fizyk holenderski i laureat nagrody Nobla.
[18] Albert Einstein (1879-1955), wybitny niemiecki fizyk pochodzenia żydowskiego, twórca szczególnej i ogólnej teorii względności.

tej pracy [2]-[15], zwłaszcza w odniesieniu do rozdziałów 1÷7. Niektóre z wymienionych tutaj pozycji są wykorzystywane również i w innych rozdziałach tej książki.

1.2. ZASADA D'ALEMBERTA

Rozważmy układ materialny nieswobodny (poddany więzom) złożony z punktów materialnych, opisany następującymi równaniami ruchu wynikającymi z prawa Newtona

$$m_n \mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{W}_n + \mathbf{R}_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{1.4}$$

przy czym $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{W}_n$ i $\mathbf{R}_n$ oznaczają odpowiednio wypadkowe siły zewnętrzne, wewnętrzne i reakcje.

Na każdy punkt o numerze „n" mogą działać siły $\mathbf{W}_n$ pochodzące od innych (nawet wszystkich) punktów badanego układu punktów materialnych. Z kolei siły zewnętrzne $\mathbf{F}_n$ reprezentują oddziaływanie otoczenia.

Jeśli $\mathbf{F}_n = \mathbf{0}$ (brak oddziaływania zewnętrznego), to w mechanice taki układ nazywamy *autonomicznym* (*izolowanym*). Ponadto w ogólnym przypadku układ punktów materialnych (UPM) może być swobodny lub nieswobodny. Siły reakcji $\mathbf{R}_n$ są reakcjami *więzów*, czyli ograniczeń nałożonych na punkty materialne, tzn. na ich przemieszczenia i prędkości, co będzie bardziej szczegółowo opisane w rozdziale 9. *Układem swobodnym* nazywać będziemy UPM, na który nie są narzucone więzy lub też taki, w którym reakcję więzów potrafimy wyznaczyć jawnie w postaci sił reakcji, tzn. nie wymagają one rozwiązywania dodatkowych tzw. *równań więzów*, i wtedy siły $\mathbf{R}_n$ mogą być traktowane jako $\mathbf{F}_n$. W przeciwnym przypadku UPM nazywać będziemy *układem nieswobodnym*. Siły występujące po prawej stronie równania (1.4) i dotyczące punktu n w ogólnym przypadku mogą zależeć od położenia i prędkości pozostałych punktów UPM, jak również w sposób jawny od czasu, tzn. $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_N, t)$, $\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_N, t)$, $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_n(\mathbf{r}_1,$ $..., \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_N, t)$.

Niech każdy z punktów materialnych dozna *przesunięcia przygotowanego* $\delta\mathbf{r}_n$, gdzie $\mathbf{r}_n$ jest *promieniem wodzącym* punktu n. Mnożąc skalarnie obydwie strony równania (1.4) przez $\delta\mathbf{r}_n$ i dodając stronami, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N}(\mathbf{F}_n + \mathbf{W}_n + \mathbf{R}_n - m_n\mathbf{p}_n)\circ\delta\mathbf{r}_n = 0. \tag{1.5}$$

Zakładając, że rozważamy jedynie więzy idealne, które z definicji spełniają zależność

$$\sum_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \circ \delta\mathbf{r}_n = 0, \tag{1.6}$$

to równanie (1.5) przyjmie postać

$$\sum_{n=1}^{N}(\mathbf{F}_n + \mathbf{W}_n - m_n\mathbf{p}_n)\circ\delta\mathbf{r}_n = 0. \tag{1.7}$$

Otrzymane równanie pozwala na sformułowanie *zasady d'Alemberta*. Brzmi ona następująco:

> *Suma iloczynów skalarnych przesunięć przygotowanych oraz sił zewnętrznych, wewnętrznych i wektorów (-$m_n\mathbf{p}_n$) punktów układu materialnego jest równa zeru.*

Dokonując rzutowania wektorów występujących w równaniu (1.7) na osie przyjętego prostokątnego układu współrzędnych ($OX_1X_2X_3$), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}[(F_{nx_1} + W_{nx_1} - m_n\ddot{x}_{1n})\delta x_{1n} + (F_{nx_2} + W_{nx_2} - m_n\ddot{x}_{2n})\delta x_{2n} +\\ +(F_{nx_3} + W_{nx_3} - m_n\ddot{x}_{3n})\delta x_{3n}] = 0.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Otrzymane równanie często nazywane jest *równaniem ogólnym mechaniki*. Warto podkreślić, że wynika ono z wcześniej wprowadzonych praw Newtona. Jeśli rozważamy układ swobodny, to wszystkie przesunięcia przygotowane są niezależne. Oznacza to, że równanie ogólne będzie spełnione wówczas, gdy wyrażenia w nawiasach będą równe zeru. Otrzymujemy wówczas $3N$ równań różniczkowych rzędu drugiego o postaci

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_1}+W_{nx_1}-m_n\ddot{x}_{1n})=0,\\
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_2}+W_{nx_2}-m_n\ddot{x}_{2n})=0,\\
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_3}+W_{nx_3}-m_n\ddot{x}_{3n})=0.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Jeśli suma sił wewnętrznych jest równa zeru, to powyższe równania upraszczają się jeszcze bardziej, przyjmując postać

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_1}-m_n\ddot{x}_{1n})=0,\\
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_2}-m_n\ddot{x}_{2n})=0,\\
&\sum_{n=1}^{N}(F_{nx_3}-m_n\ddot{x}_{3n})=0.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Powyższe trzy równania mogą być zapisane w następującej postaci wektorowej

$$
\sum_{n=1}^{N}\mathbf{F}_{Bn}+\mathbf{F}_n=\mathbf{0}.
\tag{1.11}
$$

Powyżej przyjęto, że siła $\mathbf{F}_{Bn}=-m_n\mathbf{p}_n$. Zwana jest ona *siłą bezwładności* lub *siłą d'Alemberta* działającą na punkt materialny n. Posiada ona zwrot przeciwny do siły czynnej $\mathbf{F}_n$.

Przypomnijmy, że wektory wodzące $\mathbf{r}_n$ określają położenie punktu materialnego „n” mierzone od początku układu współrzędnych. Po lewostronnym pomnożeniu równania (1.11) wektorowo przez $\mathbf{r}_n$ otrzymujemy

$$
\sum_{n=1}^{N}(\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_{Bn}+\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n)=\mathbf{0}.
\tag{1.12}
$$

Zauważmy, że sumy iloczynów występujących powyżej reprezentują momenty główne układu sił zewnętrznych $\mathbf{F}_n$ i układu sił bezwładności $\mathbf{F}_{Bn}$, czyli

$$\mathbf{M}_{\mathrm{O}} = \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n), \tag{1.13}$$

$$\mathbf{M}_{B\mathrm{O}} = \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{Bn}). \tag{1.14}$$

Wprowadźmy pojęcia *wektorów głównych sił zewnętrznych*, *sił bezwładności* oraz *reakcji* i *momentu głównego reakcji* w następującej postaci

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_n, \qquad \mathbf{F}_B = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_{Bn},$$

$$\mathbf{R} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{R}_n, \qquad \mathbf{M}_{R\mathrm{O}} = \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{r}_n \times \mathbf{R}_n). \tag{1.15}$$

Zauważmy, że zostały one wprowadzone do układu po „uwolnieniu go od więzów". W ten sposób układ materialny pozostaje w równowadze pod działaniem sił bezwładności, sił czynnych i reakcji oraz momentów pochodzących od tych sił wówczas, gdy

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_B + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{O}} + \mathbf{M}_{B\mathrm{O}} + \mathbf{M}_{R\mathrm{O}} = \mathbf{0}. \tag{1.17}$$

Otrzymany wynik (wzory (1.16) i (1.17)) podsumowuje następująca zasada:

Układ wektorów złożony z sił bezwładności, sił zewnętrznych i reakcji ograniczających ruchy tego układu oraz ich momentów jest układem równoważnym zeru.

W przypadku układów swobodnych (brak więzów i tym samym reakcji) równania (1.16) i (1.17) redukują się do następujących:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_B = \mathbf{0}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{O}} + \mathbf{M}_{B\mathrm{O}} = \mathbf{0}. \tag{1.19}$$

Otrzymujemy zatem następującą zasadę dla układów swobodnych:

Układ sił zewnętrznych i momentów pochodzących od sił działających na punkty układu materialnego swobodnego *jest w każdej chwili czasu równoważony układem sił bezwładności i momentami pochodzącymi od działania tych sił bezwładności.*

1.3. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH

Rozważmy układ materialny złożony z N punktów materialnych pozostający w spoczynku. Jeśli układ pozostaje w spoczynku, to przyspieszenia jego wszystkich punktów są równe zeru. Z równania (1.5) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N} (\mathbf{F}_n + \mathbf{W}_n + \mathbf{R}_n) \circ \delta \mathbf{r}_n = 0. \tag{1.20}$$

Jeśli iloczyn skalarny siły i przesunięcia przygotowanego przedstawia *pracę przygotowaną siły*, to równanie (1.20) może być zinterpretowane w sposób następujący:

W położeniu równowagi układu materialnego suma prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych, wewnętrznych i reakcji jest równa zeru.

Powyższa zasada została sformułowana na podstawie równań równowagi i stanowi ona warunek konieczny. Załóżmy teraz, że siły działające na układ wykonałyby pewną pracę, co spowodowałoby zmianę energii kinetycznej δE_{kn} każdego z punktów układu. Energia kinetyczna powstałaby jednak z pracy wcześniej wspomnianych sił, i wobec tego mamy

$$\sum_{n=1}^{N} (\mathbf{F}_n + \mathbf{W}_n + \mathbf{R}_n) \circ \delta \mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^{N} \delta E_{kn} = 0. \tag{1.21}$$

Oznacza to, że przyrost energii kinetycznej układu punktów jest zerowy i dlatego układ się nie porusza. Jest to warunek dostateczny. Zasada prac przygotowanych przedstawia zatem warunek konieczny i dostateczny równowagi układu. W przypadku więzów idealnych (suma prac reakcji jest równa zeru) i układów sztywnych (suma prac sił wewnętrznych jest równa zeru) zasada ta znacznie się upraszcza i przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_n \circ \delta\mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^{N} (\mathrm{F}_{x_1 n}\delta x_{1n} + \mathrm{F}_{x_2 n}\delta x_{2n} + \mathrm{F}_{x_3 n}\delta x_{3n}) = 0.$$

Zasada pracy przygotowanej w tym przypadku brzmi następująco.

W położeniu równowagi układu materialnego (ciała sztywne, więzy idealne) suma prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych na przemieszczeniach przygotowanych zgodnych z możliwą kinematyką układu jest równa zeru.

Powyższą zasadę wykorzystuje się często w przypadku zastosowań, które podano niżej:

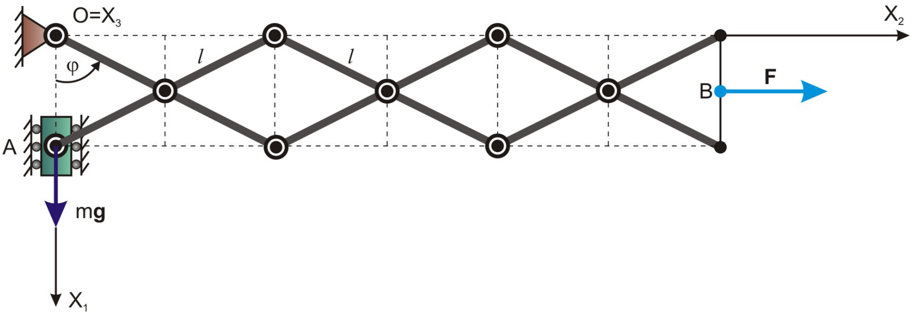
(i) siły reakcji (dla powierzchni gładkich i bez tarcia) oraz siły wewnętrzne mogą być usunięte z rozważań (co pokażemy w przykładzie 1.1);
(ii) zagadnienia statyki poprzez tę zasadę wiążą się z zagadnieniami kinematyki;
(iii) problem może być bezpośrednio sformułowany w tzw. *współrzędnych uogólnionych* q_n o postaci

$$\sum_{n=1}^{N} Q_n \delta q_n = 0.$$

Należy zauważyć, że w przypadku zasady pracy przygotowanej odniesionej do zasady d'Alemberta o postaci (1.5) punkt (iii) traci swą ważność, bowiem wspomniana zasada, ogólnie rzecz biorąc, nie może być bezpośrednio sformułowana w odniesieniu do współrzędnych uogólnionych, co znacznie utrudnia jej stosowanie (szczegółowa analiza tego zagadnienia jest opisana w rozdziałach 9 i 11).

Przykład 1.1

Wyznaczyć wartość siły $\mathbf{F}$, aby płaski mechanizm przedstawiony na rys. 1.1 pozostawał w równowadze statycznej określonej poprzez kąt φ, gdzie $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ oznacza ciężar suwaka w prowadnicy pionowej.



Rys. 1.1. Mechanizm pozostający w równowadze statycznej

Po przyjęciu układu kartezjańskiego $OX_1X_2X_3$ kinematyka punktów *A* i *B* jest określona następującymi równaniami

$$x_{1A} = 2l\cos\varphi,$$
$$x_{2B} = 6l\sin\varphi.$$

Zgodnie z zasadą pracy przygotowanej, i wykorzystując powyższe związki geometryczne, mamy

$$F\delta x_{2B} + mg\delta x_{1A} = 0.$$

Ponieważ

$$\delta x_{1A} = -2l\sin\varphi\delta\varphi,$$
$$\delta x_{2B} = 6l\cos\varphi\delta\varphi,$$

więc

$$(3F\cos\varphi - mg\sin\varphi)\delta\varphi = 0,$$

co ma miejsce dla dowolnego $\delta\varphi$. Mechanizm pozostaje w równowadze statycznej, gdy

$$F = \frac{1}{3}mg\mathrm{tg}\varphi. \qquad \blacksquare$$