
Spis treści

Przedmowa	5
1 Liczby zespolone	9
2 Elementy algebry liniowej	19
3 Ciągi liczbowe	31
4 Szeregi liczbowe	37
5 Granica i ciągłość funkcji	47
6 Rachunek różniczkowy	59
7 Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	83
8 Szeregi funkcyjne (potęgowe i Fouriera)	113
9 Funkcje rzeczywiste dwóch zmiennych	127
10 Równania różniczkowe zwyczajne	146
11 Całki podwójne i krzywoliniowe	170
12 Całki potrójne	195
13 Analiza wektorowa	204
14 Całki krzywoliniowe w \mathbb{R}^3 i powierzchniowe	210
15 Równania różniczkowe cząstkowe	223
16 Prawdopodobieństwo i elementy statystyki	257
17 Liniowe równania różnicowe	280
Dodatek	304
18 Zbiór zadań (przykładowych i do rozwiązania) do poszczególnych rozdziałów	308

Najczęściej używane symbole i funkcje w Maximie.	497
Literatura	500

W badaniach nad procesem uczenia się i nauczania matematyki nie można pomijać faktu, że nigdy nie mamy do czynienia z ahistorycznym, modelowym typem ucznia i nauczyciela, ale że są to zawsze ludzie uwarunkowani czasem, w którym żyją.

Prof. Z. Krygowska

Przedmowa

Skrypt ten zawiera elementarne działy matematyki wyższej wykładane dla studentów uczelni technicznych ze szczególnym uwzględnieniem właśnie kierunków technicznych. Prowadzi czytelnika przez materiał w sposób logiczny i spójny, wymagając wcześniejszej znajomości podstawowych faktów matematycznych z zakresu szkół licealnych zamieszczonych w skryptach: [1], [2], oba skrypty pod moją redakcją.

Nauczanie matematyki na uczelni technicznej musi być ukierunkowane na potrzeby kształcenia danego wydziału. Innej wiedzy matematycznej wymaga się od studenta, dajmy na to, Wydziału Chemicznego a innej od studenta Wydziału Mechanicznego. Zupełnie inni studenci trafiają na te wydziały i nie chodzi tu o poziom wiedzy, ale o specyfikę, jaką ma każdy z wydziałów.

Na uczelniach technicznych rozpoczyna studia młodzież o bardzo szerokim spektrum przygotowania merytorycznego z matematyki i fizyki, od bardzo dobrze do zdecydowanie słabo przygotowanych. Dzisiaj aspiracje młodych ludzi są takie, że chcą studiować. To bardzo dobrze, jednak obecny poziom matury, szczególnie tej zdawanej na poziomie podstawowym, nie gwarantuje, że kandydat aplikujący na uczelnię techniczną posiada wiedzę i umiejętności z zakresu matematyki i fizyki umożliwiające studiowanie. Dostrzegamy poważny niedostatek u studentów


pierwszego roku niezbędnej techniki rachunkowej oraz wyraźny spadek umiejętności analitycznych.

Luka, jaka powstała między matematyką szkolną a akademicką po wprowadzeniu reform kształcenia w 1989 r. i 1999 r., pogłębi się jeszcze bardziej po wprowadzeniu nowej podstawy programowej w 2009 r. do szkół podstawowych i gimnazjalnych. Do szkół licealnych reforma wejdzie w 2012 r., a pierwsi absolwenci trafią na uczelnie w 2015 roku. Redukcja treści zawartych w podstawie programowej matematyki ma przyczynić się do zwrócenia większej uwagi w procesie nauczania na rozumowanie i dogłębne opanowanie wiedzy zawartej w nowym programie. Oczywiście to dobrze, ale z drugiej strony zajęcia wyrównawcze nie zapełnią jeszcze bardziej pogłębionej luki programowej. Są one jedynie próbą wyrównania poziomu wiedzy kandydatów na studia. Wprowadzenie Krajowych Ram Kwalifikacji, a co za tym idzie efektów kształcenia, a więc zasobu wiedzy, umiejętności i kompetencji, stwarza znakomitą okazję do przemyślenia, czego będzie się uczyć z matematyki i po co. Skrypt ten łącznie z wyżej wymienionymi oraz skryptami [3] i [4] będzie zawierać podstawowy zakres wiedzy i umiejętności z matematyki wyższej (klasycznej, nie abstrakcyjnej), stanowiąc przede wszystkim narzędzie w pracy przyszłego inżyniera a jednocześnie podstawę do samodzielnego uczenia się i analizowania tych problemów matematycznych, które na swojej drodze naukowej czy zawodowej można napotkać. Nieodchodząc od matematycznej precyzji, ograniczamy się w kilku rozdziałach do bardziej intuicyjnego podejścia do wielu zagadnień, rezygnując często ze ścisłego definiowania pojęć, jak i też dowodów formułowanych twierdzeń. Zostały one wprowadzone i w wyżej wymienionych skryptach, jak też i w częściowo zapomnianym skrypcie [5], a także [6], z których to opracowań i szczególnie dobrze dobranych przykładów korzystaliśmy. Materiał staramy się wyłożyć w sposób przejrzysty i zarazem elementarny tak, żeby ze skryptu mogli korzystać również gorzej matematycznie przygotowani studenci. Część skryptu jednak, wykracza poza ramy tradycyjnie wykładane na uczelniach technicznych i może stanowić dobry materiał wstępny np. dla doktorantów nauk technicznych, zwłaszcza rozdziały dotyczące równań różniczkowych cząstkowych, ale również analiza wektorowa czy niektóre elementy analizy funkcji wielu zmiennych. Umieszczona została również duża liczba zadań do samodzielnego rozwiązania. Do każdego z zadań, którego wynikiem jest liczba lub wzór, podane są odpowiedzi. Przykłady ilustrujące rozważane zagadnienia zostały ułożone w ten sposób, by dać studentowi możliwość praktycznego zrozumienia materiału, są też rozwiązania rozpatrywanych problemów z wykorzystaniem odpowiednich pakietów matematycznych takich, jak Maxima. Zatem, student prócz rozumienia pojęć uzyskuje od razu narzędzie służące do rozwiązywania konkretnych zadań.

Dziś trudno wyobrazić sobie inżyniera, który nie potrafi obsługiwać komputera i wszystkie problemy matematyczne, z jakimi spotyka się w pracy zawodowej, rozwiązuje bez jego użycia, wykorzystując jedynie długopis i kartkę papieru. Współczesne programy komputerowe umożliwiają wykonywanie złożonych obliczeń nie tylko numerycznych, ale także symbolicznych, co z punktu widzenia nauczania

matematyki jest niezmiernie istotne. W doborze oprogramowania, uwzględniając potrzeby dydaktyczne, istotnym elementem jest to, aby posługiwanie się nim nie stanowiło bariery dla studentów w zdobywaniu i pogłębianiu wiedzy matematycznej. Na rynku dostępnych jest wiele programów, rozpoczynając od tych, które umożliwiają rozwiązywanie podstawowych problemów matematycznych, a skończywszy na rozbudowanych aplikacjach dających bardzo szerokie możliwości. Z wielu dostępnych pakietów matematycznych zarówno komercyjnych, jak i niekomercyjnych zdecydowano się na wykorzystanie Maximy, która obok innych programów matematycznych wykorzystywana jest na takich uczelniach, jak Harvard University, University of Cambridge. Za jej użyciem przemawiają argumenty przedstawione przez M. Małolepszego w artykule „Programy komputerowe w nauczaniu matematyki” (opublikowanym w: A. Jastriebow (red.), Technologie informatyczne w nauce, technice i edukacji. Informatyka w dobie XXI wieku, Wyd. Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji, Radom 2009):

- bardzo dobrze nadaje się do obliczeń symbolicznych, które stanowią podstawę na zajęciach z matematyki,
- korzystanie z programu, szczególnie z wykorzystaniem interfejsu wxMaxima, jest bardzo intuicyjne, co powoduje, że jego obsługa nie staje się przeszkodą w rozwiązywaniu zadań,
- wyniki wyświetlane są z wykorzystaniem symboliki matematycznej, np. $\sqrt{2}$,
- nazwy wielu funkcji i ich składnia są podobne jak w komercyjnych programach matematycznych, co jest szczególnie istotne przy „przechodzeniu” na nie,
- program jest ciągle rozwijany,
- jest to program bezpłatny, co nie jest bez znaczenia z punktu widzenia studentów, a także uczelni – choć z całą pewnością nie powinien to być argument decydujący w doborze oprogramowania.

Zdecydowano, że rozwiązania zostaną wykonane przez bezpośrednio wprowadzanie poleceń w linii komend, bez wykorzystania interfejsu graficznego. Praktyka pokazuje, iż osoby, które potrafią w Maximie rozwiązać zadania bez wykorzystania interfejsu graficznego, nie mają także większych problemów z jego obsługą. W skrypcie zostały przedstawione szkice rozwiązań większości przykładów z wykorzystaniem Maximy w wersji 5.27.0 (wykonane przez M. Małolepszego). Ze względu na to, że każdy z tych przykładów najpierw rozwiązano w tradycyjny sposób, a następnie przedstawiono możliwości rozwiązania go w programie, nie powtarzano (poza nielicznymi wyjątkami) komentarzy i wniosków. Ponadto w zbiorze zadań zostały przedstawione szkice rozwiązań wybranych zadań (wykonane przez A. Niedziałkowską). Rozwiązania w Maximie wyróżniono poprzez zamieszczenie przy nich symbolu .

Wzrost roli i znaczenia technologii informacyjnych w kształceniu matematycznym, stwierdzona skuteczność tych technologii w procesie edukacyjnym nie jest zagrożeniem dla tradycyjnych metod nauczania. Przecież wiadomo, że wykorzystanie kalkulatorów i komputerów jest wprost niezbędne we współczesnym świecie. Jednocześnie stosowanie ich bez znajomości pewnych faktów matematycznych może prowadzić do istotnych błędów. Te dwie metody nauczania matematyki, klasyczna i poprzez wprowadzenie technologii informacyjnych, nie muszą ze sobą konkurować, ale powinny się wzajemnie uzupełniać i podnosić skuteczność kształcenia matematycznego. Stosowanie najnowszych technologii informacyjnych w nauczaniu matematyki na poziomie akademickim nie skróci też w istotny sposób czasu niezbędnego do przekazania wiedzy, może natomiast urozmaicić wykład i pomóc w zrozumieniu wielu treści tak, żeby nawet matematyka – ta „straszliwa królowa nauk” stała się przyjazna.

Andrzej Just

Podziękowania

Chciałbym serdecznie podziękować dr. inż. Witoldowi Walasowi, dr inż. Ali-nie Kondratiuk-Janysce, dr. Markowi Małolepszemu, dr inż. Agnieszce Niedziałkowskiej, dr. Jerzemu Pełczewskiemu, mgr inż. Anecie Stasiak z Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej za pomoc w przygotowaniu tego skryptu, w szczególności w przygotowaniu zbioru zadań, jak też wizualizacji rozważanych zagadnień poprzez wykorzystanie odpowiednich pakietów matematycznych. Recenzentowi dr. hab. Markowi Galewskiemu, prof. PŁ dziękuję za cenne uwagi na temat poszczególnych rozdziałów, prof. Edwardowi Kąckiemu, prof. Izidorowi Dziubińskiemu i doc. Krystynie Dobrowolskiej za wieloletnią współpracę, a moim studentom za przekonanie mnie, że skrypt taki jest bardzo potrzebny.

Andrzej Just