

Spis treści

| | |
|--|------------|
| Wstęp | 5 |
| Oznaczenia | 7 |
| 1 Kolokwia z matematyki | 8 |
| 1.1 Pierwsze kolokwium | 9 |
| 1.2 Drugie kolokwium | 21 |
| 1.3 Kolokwium poprawkowe po drugim semestrze | 33 |
| 1.4 Rozwiązania i odpowiedzi | 40 |
| 1.4.1 Pierwsze kolokwium | 40 |
| 1.4.2 Drugie kolokwium | 71 |
| 1.4.3 Kolokwium poprawkowe po drugim semestrze | 109 |
| 2 Egzamin z matematyki | 135 |
| 2.1 Propozycje zadań egzaminacyjnych | 136 |
| 2.2 Rozwiązania i odpowiedzi | 168 |

WSTĘP

Skrypt ten jest kontynuacją skryptu "Analiza matematyczna i algebra. Kolokwia i egzaminy. Część 1". Głównym jego adresatem są studenci drugiego semestru Politechniki Łódzkiej, w szczególności studenci Wydziału Biotechnologii i Nauk o Żywności oraz innych wydziałów chemicznych.

Poprzednie opracowanie podzielone było na trzy części: pierwsza obejmowała zestawy zadań na kolokwia ze Wstępu do analizy matematycznej i była uzupełnieniem treści programowych zawartych we "Wstępie do analizy matematycznej i wybranych zagadnień z fizyki" (Wydawnictwo PŁ, redakcja Andrzej Just, 2007), dwie pozostałe zawierały zestawy zadań na kolokwia i zestawy pytań egzaminacyjnych. Tematyka koncentrowała się na rachunku różniczkowym i całkowym funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Uwzględniała także pewne elementy algebry: liczby zespolone oraz macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych.

Niniejsze opracowanie podzielone jest na dwie części: pierwsza obejmuje zestawy zadań na kolokwia, druga przedstawia zestawy pytań egzaminacyjnych. Zakres materiału obejmuje następujące działy analizy matematycznej takie, jak:

- funkcje rzeczywiste dwóch zmiennych rzeczywistych: dziedzina, pochodne cząstkowe, ekstrema lokalne,
- całka podwójna: całkowanie w obszarze normalnym, zamiana zmiennych w całce podwójnej, zastosowanie całki podwójnej,
- całka krzywoliniowa niezorientowana i całka krzywoliniowa zorientowana: zamiana na całkę oznaczoną, zamiana na całkę podwójną, niezależność całki krzywoliniowej zorientowanej od drogi całkowania,
- równania różniczkowe: równanie o zmiennych rozdzielonych, równanie zupełne i czynnik całkujący, równanie Bernoulliego, równanie liniowe pierwszego rzędu, równanie liniowe drugiego i wyższych rzędów.

Wcześniej poznane elementy algebry wykorzystywane są w rozwiązaniach podanych zadań.

Umieszczone w skrypcie zadania i pytania egzaminacyjne obejmują działy matematyki najczęściej wykładane na zajęciach matematyki podczas pierwszego roku nauki na wyższych uczelniach technicznych, dlatego skrypt ten może być przydatny dla znacznie szerszej grupy studentów. Zamieszczone rozwiązania całych zestawów zadań i pytań egzaminacyjnych powinny ułatwić Czytelnikowi samodzielne rozwiązywanie zadań i przygotowanie się do kolokwium i egzaminu. Wiedzę teoretyczną wymaganą przy rozwiązywaniu proponowanych zadań Czytelnik może znaleźć w podręczniku "Matematyka dla studentów studiów technicznych 2" Krystyny Dobrowolskiej, Wacława Dyczki i Heleny Jakuszenkow.

Małgorzata Terepeta
Katarzyna Dems
Izabela Józwiak
Dorian Szymczak

OZNACZENIA

W skrypcie stosować będziemy następujące oznaczenia:

| | |
|----------------|---|
| \forall | – kwantyfikator ogólny (dla każdego) |
| \exists | – kwantyfikator szczegółowy (istnieje) |
| \mathbb{R} | – zbiór liczb rzeczywistych |
| \mathbb{R}_+ | – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ |
| \mathbb{R}^2 | – zbiór punktów płaszczyzny |
| \mathbb{R}^3 | – zbiór punktów przestrzeni |
| \mathbb{N} | – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ |
| \mathbb{Z} | – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ |
| D_f | – dziedzina funkcji f |
| f | – funkcja rzeczywista dwóch zmiennych rzeczywistych $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ |
| $ D $ | – pole powierzchni obszaru $D \subset \mathbb{R}^2$ |
| $ V $ | – objętość obszaru $V \subset \mathbb{R}^3$ |
| AB | – odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B |
| $ AB $ | – długość odcinka AB |
| $f(x) _a^b$ | – przyrost wartości funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$ $f(x) _a^b = f(b) - f(a)$ |
| y_o | – rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różniczkowego liniowego |
| y_s | – rozwiązanie szczególne niejednorodnego równania różniczkowego liniowego |
| $W(x_0, y_0)$ | – wyróżnik funkcji w punkcie (x_0, y_0) $W(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$ |
| $U(x_0, y_0)$ | – otoczenie punktu (x_0, y_0) |
| $C^n(D)$ | – klasa funkcji mających ciągle pochodne cząstkowe n -tego rzędu na zbiorze D |
| $C^\infty(D)$ | – klasa funkcji mających ciągle pochodne cząstkowe dowolnego rzędu na zbiorze D |

1 KOŁOKWIA Z MATEMATYKI

Przedstawiony w tym rozdziale materiał został podzielony na dwa kolokwia: pierwsze zawiera zadania związane z funkcjami dwóch zmiennych, całką podwójną oraz zadania polegające na obliczeniu całki krzywoliniowej (niezorientowanej i zorientowanej) przez sprowadzenie jej do całki oznaczonej. W drugim kolokwium znajdują się zadania związane z twierdzeniem Greena, niezależnością całki krzywoliniowej zorientowanej od drogi całkowania oraz różnego rodzaju równaniami różniczkowymi. Każde kolokwium przewidziane jest na dwugodzinne ćwiczenia audytoryjne. Przedstawione poniżej zestawy zadań są propozycją kolokwiów o różnym stopniu trudności i oczywiście mogą być wykorzystane bezpośrednio lub po zmodyfikowaniu przez wykładowców wszystkich wydziałów Politechniki Łódzkiej, a także innych wyższych uczelni w Polsce. W podanej formie zestawy obowiązywały w ostatnich latach na Wydziale Biotechnologii i Nauk o Żywności Politechniki Łódzkiej na kierunkach: Biotechnologia oraz Technologia Żywności i Żywnienie Człowieka. Zestawy różnią się między sobą zakresem materiału, co jest związane z różnicami programowymi na tych kierunkach.

W skrypcie przedstawione są pełne rozwiązania kilku pierwszych zestawów zadań oraz odpowiedzi do wszystkich pozostałych.

1.1 PIERWSZE KOŁOKWIUM**ZESTAW 1**

1. (a) Wyznaczyć i narysować w układzie współrzędnych oraz zapisać w postaci normalnej dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1-y} + \ln(4x - y^2) + \sqrt{3 - |x - 2|}.$$

- (b) Sprawdzić, czy funkcja $g(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $x \cdot g'_x(x, y) + y \cdot g'_y(x, y) = xy + g(x, y)$.

2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

3. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{1}{y+1} dx dy,$$

$$\text{jeśli } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x \wedge y - 2 \leq 0 \wedge x + 1 \geq 0\}.$$

4. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

$$\text{jeśli } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

5. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_K xy^2 dx - \frac{1}{y^2 + 1} dy,$$

jeśli K jest krzywą opisaną równaniem $y = e^x$, od punktu o odciętej $x = 2$ do punktu o odciętej $x = -1$.

ZESTAW 2

1. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną

$$\int_K xy^2 dl,$$

jeśli K jest okręgiem $x^2 + y^2 = -2y$.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_K \frac{y^2}{x} dx - xy dy,$$

jeśli K jest krzywą $y = \ln x$, od punktu $A(x_A, 1)$ do punktu $B(x_B, 0)$.

3. (a) Wyznaczyć i narysować w układzie współrzędnych oraz zapisać w postaci normalnej dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2) + y^2 \ln(1 - |y - x|) \cdot \sqrt{-x}.$$

- (b) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$g(x, y) = (2x - y^2)e^{-2x}.$$

4. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \cos x dx dy,$$

jeśli D jest czworokątem $KLMN$ o wierzchołkach: $K(-2, -2)$, $L(0, -8)$, $M(0, 2)$, $N(-2, 0)$.

5. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (x - 3) dx dy,$$

jeśli D jest obszarem opisanym nierównościami: $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$,
 $y \geq -x$.

ZESTAW 3

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = \ln(4 - y - x^2) + y.$$

2. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D x \, dx dy,$$

jeśli D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y = \sin x$, $y = -x$,
 $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + 2) \, dx dy,$$

jeśli D jest obszarem opisanym nierównościami: $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$,
 $0 \leq y \leq x$.

4. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchniami: $z = 1$,
 $z = 11 - x^2 - y^2$ oraz $x^2 + y^2 = 4$.

5. Wyznaczyć i narysować w układzie współrzędnych oraz zapisać w postaci normalnej dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{6x - x^2 - 5} + \ln(4x - x^2 - y) - \sin \sqrt{x + y}.$$

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f .