

Spis treści

Wstęp	5
Oznaczenia	6
1 Wstęp do analizy matematycznej	7
1.1 Propozycje sprawdzianów	7
1.2 Rozwiązania i odpowiedzi	12
2 Kolokwia z matematyki	19
2.1 Pierwsze kolokwium	20
2.2 Drugie kolokwium	32
2.3 Kolokwium poprawkowe po pierwszym semestrze	44
2.4 Rozwiązania i odpowiedzi	50
2.4.1 Pierwsze kolokwium	50
2.4.2 Drugie kolokwium	68
2.4.3 Kolokwium poprawkowe po pierwszym semestrze	84
3 Egzamin z matematyki	96
3.1 Propozycje zadań egzaminacyjnych	97
3.2 Rozwiązania i odpowiedzi	122

WSTĘP

Głównym adresatem skryptu są studenci pierwszego semestru Politechniki Łódzkiej, w szczególności studenci Wydziału Biotechnologii i Nauk o Żywności i innych wydziałów chemicznych. Przedstawiony zakres materiału obejmuje podstawowe działy analizy matematycznej takie, jak:

- podstawowe wiadomości o funkcjach elementarnych,
- ciągi liczbowe,
- szeregi liczbowe i potęgowe,
- rachunek różniczkowy funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej (granica i ciągłość funkcji, ekstrema lokalne, asymptoty krzywej, wklęsłość i wypukłość krzywej, badanie przebiegu zmienności funkcji),
- rachunek całkowy funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej (całka nieoznaczona, oznaczona, niewłaściwa),
- liczby zespolone,
- macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych.

Umieszczone w skrypcie zadania i pytania egzaminacyjne obejmują podstawowe działy matematyki najczęściej wykładane na kursie matematyki na wyższych uczelniach technicznych, stąd skrypt może być przydatny dla znacznie szerszej grupy studentów.

Niniejsze opracowanie podzielone jest na trzy części: pierwsza obejmuje zestawy zadań na kolokwia ze Wstępu do analizy matematycznej i jest uzupełnieniem treści programowych zawartych we "Wstępie do analizy matematycznej i wybranych zagadnień z fizyki" (Wydawnictwo PŁ, redakcja Andrzej Just, 2007), dwie pozostałe zawierają zestawy zadań na kolokwia i zestawy pytań egzaminacyjnych.

Skrypt ten pozwala studentom zapoznać się z wieloma rodzajami zadań na kolokwia o zróżnicowanym stopniu trudności oraz przykładami testów egzaminacyjnych. Jest to dobry materiał do indywidualnej pracy. Jednocześnie zamieszczone rozwiązania całych zestawów zadań z kolokwiów i pytań egzaminacyjnych powinny ułatwić Czytelnikowi samodzielne rozwiązywanie zadań i przygotowanie się do egzaminu.

Chcielibyśmy serdecznie podziękować doc. Andrzejowi Justowi za cenne uwagi dotyczące redakcji skryptu, dr Krystynie Dobrowolskiej za wieloletnią współpracę oraz dr inż. Ewie Marciniak i dr inż. Henrykowi Dębińskiemu za inspirację.

*Małgorzata Terepeta
Katarzyna Dems
Izabela Jóźwik
Dorian Szymczak*

OZNACZENIA

W skrypcie stosować będziemy następujące oznaczenia:

\forall	–	kwantyfikator ogólny (dla każdego)
\exists	–	kwantyfikator szczegółowy (istnieje)
\mathbb{R}	–	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{R}_+	–	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
\mathbb{N}	–	zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
\mathbb{C}	–	zbiór liczb zespolonych
\mathbb{Z}	–	zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
$\text{Im } z$	–	część urojona liczby zespolonej z
$\text{Re } z$	–	część rzeczywista liczby zespolonej z
\bar{z}	–	liczba sprzężona do liczby zespolonej z
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	–	ciąg liczbowy o wyrazie ogólnym a_n
f	–	funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$
$D (D_f)$	–	dziedzina funkcji (dziedzina funkcji f)
$D' (D'')$	–	dziedzina pochodnej pierwszego rzędu (drugiego rzędu)
$Y (Y_f)$	–	zbiór wartości funkcji (zbiór wartości funkcji f)
$f(A)$	–	obraz zbioru A wyznaczony przez funkcję f
$f \circ g$	–	złożenie funkcji f i g
$\stackrel{H}{=}$	–	stosowanie reguły de l'Hospitala
\cup	–	krzywa wypukła
\cap	–	krzywa wklęsła
pp	–	punkt przegięcia krzywej
$ P $	–	pole powierzchni obszaru $P \subset \mathbb{R}^2$
$ V $	–	objętość obszaru $V \subset \mathbb{R}^3$
$ l $	–	długość łuku $l \subset \mathbb{R}^2$
$f(x) _a^b$	–	przyrost wartości funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$ $f(x) _a^b = f(b) - f(a)$

1 WSTĘP DO ANALIZY MATEMATYCZNEJ

W roku akademickim 2007/2008 na wszystkich kierunkach studiów Politechniki Łódzkiej wprowadzony zostaje nowy przedmiot: Wstęp do analizy matematycznej. Jego program obejmuje wybrane podstawowe wiadomości z zakresu nowej matury na poziomie rozszerzonym, takie jak na przykład: funkcje elementarne, ich własności oraz równania i nierówności z nimi związane, ciągi liczbowe, a także granice ciągów i funkcji. Wiadomości te zostaną uzupełnione i rozwinięte podczas kursu matematyki w pierwszym semestrze studiów.

Przedstawione w niniejszym opracowaniu propozycje zestawów zadań koncentrują się na zagadnieniach i umiejętnościach, które będą najbardziej przydatne podczas dalszego toku nauki. Oczywiście zestawy te nie wyczerpują wszystkich możliwych typów zadań, jednak dobrane zostały tak, aby zarówno sprawdzić wiadomości z podanego zakresu, jak i przygotować studenta do rozwiązywania problemów matematycznych, z którymi spotka się w dalszym toku nauki.

1.1 PROPOZYCJE SPRAWDZIANÓW

ZESTAW 1

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = x^3 \ln \left(x - 5 \cdot \frac{3-x}{x-7} \right) + \sqrt{|2x-1| - 5} - 3x \sqrt[3]{1 - \log_2(x-6)}.$$

2. Rozwiązać równania i nierówności:

(a) $2^{2x+1} - 2^{x-1} \geq 7,$

(b) $\frac{5x-2}{x} \leq x+2,$

(c) $\log_6(5-x) - 2\log_6 \sqrt{3-x} = 1.$

3. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{dla } x \leq 0, \\ 4x - 2x^2 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Naszkicować wykres funkcji f .
- (b) Podać przedziały monotoniczności funkcji f .
- (c) Wyznaczyć $f(\langle 0, 1 \rangle)$.
- (d) Podać miejsca zerowe funkcji f .
- (e) Podać wartości: $f(0)$, $f(-3)$, $f(3)$.

ZESTAW 2

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \log_{x+3}(x^2 - 4x - 5) + \sqrt{\frac{x+5}{x^2 - 12x + 36}}.$$

2. Rozwiązać równanie

$$\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots = 1 + \sin x, \quad \text{dla } x \in (0, 2\pi).$$

3. Rozwiązać nierówności:

(a) $|x^2 - 2x| < 3,$

(b) $(0, 5)^x \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x+2}{x+6}},$

(c) $\ln(3x - 5) \leq -2.$

ZESTAW 3

1. Wiedząc, że:

$$f(x) = (x - 2)^2(x + 1), \quad g(x) = x + 1,$$

$$h(x) = 5^{3x+3} - 2^{3x+1}, \quad k(x) = 2^{x+3} + 4 \cdot 5^{x+4},$$

rozwiązać nierówności:

$$f(x) > g(x), \quad h\left(\frac{x}{3}\right) \geq k(x - 2).$$

2. Rozwiązać równania i nierówności:

(a) $|x^3 - 1| = |x - 1|,$

(b) $\sin^2 x - 2 \sin x \geq 0,$

(c) $\log_3(2x - 1) - 1 \leq \log_3(x - 2).$

3. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{dla } x \leq 0, \\ \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ x - \pi & \text{dla } x > \pi. \end{cases}$$

(a) Naszkieować wykres funkcji f .(b) Podać zbiór wartości funkcji f .(c) Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $\langle -2, \frac{\pi}{2} \rangle$.(d) Z wykresu odczytać rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 0$.

ZESTAW 4

1. (a) Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{(n + 2)(n + 7)},$$

- (b) Wykazać, że ciąg
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- o wyrazie ogólnym
- $a_n = \frac{2}{n} - 2^n$
- ,
- $n \in \mathbb{N}$
- , jest malejący.

2. Rozwiązać równania i nierówności:

- (a) $2 \cos^2 x = 3(1 - \sin x)$,
 (b) $\log_3(4 - x) \geq 1 + \log_3 x + \log_3(1 + x)$,
 (c) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

3. Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x| - 3 + x^2 \leq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2-x} \geq 1\}.$$

Wyznaczyć zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.**ZESTAW 5**

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{\log_{x+5}(4-x)}{x^3 - x^2 - 9x + 9} + x^2 \arccos \frac{x+3}{3} + \sqrt{8-2x-x^2}.$$

2. Rozwiązać równania i nierówności:

- (a) $\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x = 0$,
 (b) $(0, 25)^{\frac{1-2x}{x-3}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
 (c) $\log_{0,25}(6-4x) \leq -3$.

3. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{dla } x \leq -1, \\ 3x & \text{dla } x \in (-1, 1), \\ \log_3 x & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Naszkicować wykres funkcji f .
 (b) Znaleźć miejsca zerowe funkcji f .
 (c) Podać zbiór wartości funkcji f .
 (d) Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji f .
 (e) Czy funkcja f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnić.

ZESTAW 6

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - \log_2(9 - x^2)}}{\ln(1 - 2x + 4x^2)} + \frac{5^x - 1}{|4 - x| - 3}.$$

2. Wiedząc, że

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = \frac{x}{x + 1},$$

wyznaczyć funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$ (o ile istnieją). Określić dziedzinę i zbiór wartości podanych i wyznaczonych funkcji.

3. Obliczyć wartości wyrażeń:

(a) $\log_5 0,04 + 2 \log_5 30 - \log_5 7,2$,

(b) $\log_{2\sqrt{2}} 8\sqrt{2} - 3^{\log_8 2\sqrt{2} + \log_4 0,125} - 5^{\log_5 2}$,

(c) $\cos\left(\frac{11}{4}\pi\right) - 2 \sin\left(-\frac{16}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) \cdot \sin(121\pi)$.

ZESTAW 7

1. Rozwiązać równania:

(a) $5^{x+2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} - 26 = 0$,

(b) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x = 6$,

(c) $4 \sin^2 x = 3$.

2. Zbadać parzystość funkcji:

(a) $f(x) = \ln \frac{3^x + 1}{3^{-x} + 1}$,

(b) $g(x) = \frac{\cos 2x}{1 + x^2} - \sin x$.

3. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{10 \cdot 3^{x+1} - 9} = 2(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots).$$

ZESTAW 8

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \log_{x+2}(5-x) + x \arccos \frac{x+1}{5} - \frac{x^2}{x^2-3x}.$$

2. Rozwiązać równania i nierówności:

(a) $\log_4 \left(\frac{3x-1}{4-x} + 4 \right) = 1,$

(b) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} > -3,$

(c) $2(\sin^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x) \geq \sqrt{3}.$

3. Z badać monotoniczność ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n-2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

i wyznaczyć jego granicę.