

Spis treści

Wykaz oznaczeń	6
Przedmowa	9
1 WPROWADZENIE.....	11
1.1 Mechanika newtonowska	14
1.2 Mechanika lagranżowska	19
1.3 Mechanika hamiltonowska	20
2 WIĘZY I ICH KLASYFIKACJA.....	23
2.1 Układy nieswobodne	23
2.2 Więzy dwustronne i jednostronne	23
2.2.1 Więzy dwustronne	24
2.2.2 Przykłady więzów dwustronnych	24
2.2.3 Więzy jednostronne	26
2.2.4 Przykłady więzów jednostronnych	26
2.3 Więzy geometryczne i kinematyczne	28
2.3.1 Więzy geometryczne	28
2.3.2 Przykłady więzów geometrycznych	29
2.3.3 Więzy kinematyczne	30
2.3.4 Przykłady więzów kinematycznych.....	31
2.3.5 Więzy kinematyczne całkowalne	32
2.4 Więzy reonomiczne i skleronomiczne.....	34
2.4.1 Więzy reonomiczne.....	34
2.4.2 Więzy skleronomiczne.....	36
2.5 Więzy idealne i przemieszczenia przygotowane	37
2.5.1 Przemieszczenia przygotowane	37

2.5.2	Więzy idealne	42
2.5.3	Przykłady więzów idealnych.....	44
3	RÓWNANIA DYNAMIKI I ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH WE WSPÓLRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH	55
3.1	Ogólne równanie dynamiki analitycznej.....	55
3.2	Zasada prac przygotowanych.....	60
3.2.1	Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych kartezjańskich	68
3.3	Zasada d'Alemberta.....	71
3.4	Równania Lagrange'a I-go rodzaju.....	75
3.5	Reakcje więzów	81
4	OPIS RUCHU WE WSPÓLRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH	93
4.1	Współrzędne uogólnione	93
4.2	Prędkości i przyspieszenia uogólnione	96
4.3	Uogólnione przemieszczenia przygotowane	97
4.4	Siły uogólnione	98
4.4.1	Praca przygotowana sił działających na ciało sztywne ..	100
4.5	Zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych	102
4.6	Równowaga w zachowawczym polu sił	115
4.6.1	Rodzaje równowagi.....	118
4.6.2	Zadania do rozwiązania – zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych; stateczność położenia równowagi.....	142
4.7	Równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów holonomicznych	148
4.7.1	Zadania do rozwiązania – równania Lagrange'a II-go rodzaju dla układów holonomicznych	162
5	WPROWADZENIE DO DYNAMIKI UKŁADÓW NIEHOLONOMICZNYCH.....	165
5.1	Równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów nieholonomicznych	165
5.1.1	Równania Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami .	167
5.1.2	Metoda eliminacji zależnych przemieszczeń przygotowanych z równania d'Alemberta – Lagrange'a....	179
5.2	Równania Maggi'ego dla układów nieholonomicznych.....	184

5.3	Równania Boltzmann-Hamela	190
5.3.1	Równania Boltzmann-Hamela w opisie ruchu kulistego	191
5.3.2	Zadania do rozwiązania – dynamika układów nieholonomicznych.....	195
6	DODATKI	203
A	Kinematyka ciała sztywnego	203
A.1	Prędkość punktów ciała sztywnego	204
A.2	Metody określania prędkości punktów ciała sztywnego	204
A.2.1	Metoda bieguna	205
A.2.2	Metoda środka chwilowego obrotu.....	206
A.2.3	Metoda rzutów prędkości	208
B	Energia kinetyczna ciała sztywnego	209
B.1	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu ogólnym	209
B.2	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu kulistym	211
B.3	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu płaskim.....	212
B.4	Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym .	213
C	Przykłady rozwiązań zadań przy użyciu komputera – system <i>wxMaxima</i>	215
C.1	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do rozwiązania układu równań algebraicznych	215
C.2	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do określenie położenia równowagi	218
C.3	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do badania stateczności.....	220
C.4	Wykorzystanie systemu <i>wxMaxima</i> do generowania równań dynamiki.....	222
	Bibliografia.....	225
	Spis rysunków	228
	Spis tabel	236
	Indeks	237

Przedmowa

Mechanika analityczna jest propozycją innego opisu dynamiki ciał niż znany wcześniej sposób, polegający na bezpośrednim użyciu praw dynamiki Newtona. Nowe podjęcie do mechaniki, zaproponowane przez J. Lagrange'a i nazwane mechaniką analityczną, jest o sto lat późniejsze od mechaniki newtonowskiej, ale jedno i drugie zaliczane jest już do klasyki.

Klasyczne metody mechaniki analitycznej koncentrują się na badaniu dynamiki nieswobodnych układów punktów materialnych i ciał sztywnych. Jeśli ograniczamy się do metod i narzędzi z czasów, gdy mechanika była królową nauk, to rozwiązywanie wielu zadań jest trudne, a często wręcz niemożliwe.

W podręcznikach poświęconych mechanice analitycznej przedstawiany jest szeroki wachlarz metod konstruowania równań opisujących ruch układów materialnych i ciał sztywnych. Większość zadań jest jednak dobierana w taki sposób, by możliwe było znalezienie rozwiązania analitycznego. Z drugiej strony wymagania współczesnej techniki zmuszają do analizy złożonych układów i prowadzą do zadań, dla których nie daje się znaleźć rozwiązania ścisłego i jednym ze sposobów jest analiza numeryczna przy pomocy komputera.

Trudności wiążące się z bezpośrednim wykorzystaniem metod mechaniki klasycznej, a także szeroki dostęp do komputerów, rozwój metod analizy numerycznej i bogactwo oprogramowania, wymusiły zmianę w sposobie formułowania zadań typowych dla dynamiki układów mechanicznych.

Fakty te powodują, że konieczna jest modyfikacja programu mechaniki analitycznej na studiach technicznych i przedstawienie nowych sposobów formułowania zadań mechaniki oraz metod pozwalających na otrzymanie rozwiązania przy pomocy komputera (przy czym chodzi zarówno o rozwiązania numeryczne, jak i analityczne).

Celem założonym przy opracowywaniu tego skryptu było pokazanie możliwości wykorzystania metod mechaniki analitycznej do analizy równowagi i ruchu układów mechanicznych z użyciem komputera. Materiał zawarty w skrypcie jest dostosowany do aktualnego programu studiów II stopnia na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. Zrozumienie i przyswojenie podstaw mechaniki analitycznej ma ułatwić absolwentom studiowanie i stosowanie innych, bardziej zaawansowanych metod (takich jak równania Hamiltona, Kane'a, Gibbsa, czy metoda projekcyjna), używanych w zagadnieniach dynamiki i sterowania układów wieloczłonowych.

W skrypcie zostały zamieszczone przykłady rozwiązań zadań dotyczących omawianych zagadnień. Niektóre z nich zawierają również wyniki numerycznych rozwiązań otrzymywanych równań. Zadania zostały rozwiązane przy użyciu pakietów programów matematycznych, takich jak *Mathematica* czy *Maxima* (pozwalają one na uzyskanie rozwiązań na drodze analitycznej bądź numerycznej).

Należy zwrócić uwagę, że do rozwiązania wielu zadań przy wykorzystaniu tego rodzaju oprogramowania nie jest konieczne generowanie równań ruchu w jawnej postaci. Przedstawienie algorytmu rozwiązania i wykorzystanie możliwości wykonywania operacji symbolicznych przez te programy wystarcza do otrzymania ostatecznych rezultatów.

Materiał zawarty w tym skrypcie nie zawiera informacji dotyczących programów komputerowych używanych przy rozwiązywaniu zadań ani metod numerycznych wykorzystywanych w tych pakietach. Umiejętność korzystania z oprogramowania i dokładna znajomość programów nie są konieczne do zrozumienia przedstawionych tu treści.

Na ostateczny kształt tej pracy znaczący wpływ mieli autorzy recenzji – profesorowie Henryk Kamiński z Politechniki Poznańskiej i Przemysław Perlikowski z Politechniki Łódzkiej. Tą drogą chcemy serdecznie podziękować Recenzentom za wszystkie uwagi, sugestie i rady jakie od Nich dostaliśmy.

Autorzy (Łódź, styczeń 2016)