

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

**ZBYSZKO KAZIMIERSKI**

**RUCH WIROWY PŁYNÓW W PRZYRODZIE  
ORAZ W MASZYNACH I URZĄDZENIACH**

Zdjęcia satelitarne, eksperymenty  
i symulacje komputerowe

Łódź 2007

PODRĘCZNIKI AKADEMICKIE

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Zbigniew Kosma**  
**prof. dr hab. inż. Stanisław Drobnik**

**KOMITET REDAKCYJNY**  
**WYDAWNICTWA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

Przewodniczący: **prof. dr hab. Piotr Wodziński**  
Pełnomocnik Wydziału: **prof. dr hab. inż. Tomasz Kapitaniak**

© Copyright by Politechnika Łódzka 2007

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223  
tel./fax (0-42) 684-07-93  
e-mail: a-row-1@sil.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-218-4

Wydanie I. Nakład 350 egz. Ark. druk 5,5. Papier offset. 80 g. 70 x 100  
Druk ukończono w czerwcu 2007 r.  
Wykonano w Drukarni Offsetowej „Quick-Druk” s.c. 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11  
Nr 1168

## Spis treści

<b>Przedmowa</b> .....	4
<b>1. Wstęp</b> .....	6
<b>2. Model wiru, jego weryfikacja i metody wirowe</b> .....	11
2.1. Teoretyczny model pojedynczego wiru .....	11
2.2. Metody wirowe .....	21
<b>3. Ruch wirowy powietrza w atmosferze</b> .....	22
3.1. Efekt Coriolisa .....	23
3.2. Cyklony tropikalne .....	24
3.3. Tornada i trąby powietrzne .....	30
<b>4. Kryterium podobieństwa ruchu wirowego</b> .....	32
<b>5. Rozwiązania zagadnień mechaniki płynów w tym ruchu wirowego za pomocą komputerów</b> .....	33
5.1. Przegląd stosowanych metod sprowadzania równań mechaniki płynów do postaci algebraicznej .....	35
5.2. Różnice skończone – schematy równań i ich stabilność .....	36
5.3. Metody elementarnej objętości kontrolnej .....	39
5.4. Algorytmy komputerowych symulacji ruchu gazów i cieczy .....	39
5.5. Modele turbulencji i metody rozwiązania ruchu turbulentnego .....	40
5.6. Numeryczna realizacja metod wirowych .....	45
<b>6. Ruch wirowy w maszynach przepływowych</b> .....	45
6.1. Przepływy przez turbiny .....	46
6.2. Przepływy przez sprężarki .....	50
6.3. Przepływy przez pompy .....	56
<b>7. Przepływy wirowe w urządzeniach do formowania przędzy</b> .....	60
<b>8. Wiry w komorach wtryskiwaczy cieczy</b> .....	66
<b>9. Przepływy przez rurę wirową Ranka i cyklony odpylające</b> .....	70
<b>10. Ruch wirowy płynów, a zasady zachowania masy, pędu i energii</b> .....	72
<b>11. Zakończenie</b> .....	80
<b>Literatura</b> .....	84

## Przedmowa

Czytelnikom tej książki wyjaśniam, że ma ona w znacznej części charakter popularno-naukowy. Matematyka i mechanika płynów są w niej wykorzystane w najprostszej formie, która powinna być znana studentom politechnik, ale i bez tej znajomości książka powinna być zrozumiała dla czytelników, którzy szukają w niej treści fizycznych. Wzory pomagają w rozumieniu tych treści, ale nie są bezwzględnie konieczne.

W roku 2005, kiedy powstawała książka, w niektórych krajach położonych bliżej równika niż Polska, szalały tropikalne cyklony, niszczące wszystko na swej drodze. W Polsce stosunkowo rzadko, ale także zdarzają się tzw. trąby powietrzne i też są przyczyną wielu zniszczeń. Nie można zatem, pisząc o ruchu wirowym płynów, nie napisać również o tych zjawiskach, które do ruchu wirowego należą. Stąd w tytule znalazło się określenie „w przyrodzie”, bo chodzi między innymi o zjawiska, które budzą duże zainteresowanie czytelników. Wśród czytelników jest wielu takich, którzy obserwowali wirowe zagłębienia na powierzchni płynącej wody za podporami mostowymi, które nie są przyczyną szkód ale są ciekawym zjawiskiem i też należą do ruchu wirowego. Wiele osób obserwowało także wirowy spływ wody z otwartego zbiornika (np. z wanny) i stwierdziło, że jest to ruch niestateczny. O nim także będzie mowa w tej książce.

Ruch wirowy w dużej skali jest tematem tej książki. Ten rodzaj ruchu nazywa się także ruchem zawirowanym. Powstaje pytanie, czy ruch płynów jest stateczny? Okazuje się, że płyny w czasie ruchu bardzo szybko tracą stateczność. Z reguły mamy do czynienia z ruchem turbulentnym, który powstaje i rozwija się po utracie stateczności poruszającego się płynu, zwany jest po prostu turbulencją przepływów. Będzie tu głównie rozpatrywany tzw. ruch zawirowany, w którym turbulencja istnieje, i odgrywa ważną rolę. Zastrzeżenie to jest czynione dlatego, że turbulencja ma także strukturę wirową, choć w mniejszej skali. Będzie to uwzględnione w programach komputerowych, jakie są użyte do analizy ruchu wirowego płynów. Rozważania będą prowadzone dla zmiennych pierwotnych, tzn. takich jakie występują w nie przekształconych równaniach podstawowych, czyli dla prędkości, ciśnienia itd.

Wiele zjawisk ruchu wirowego zostało rozwiązanych za pomocą istniejących programów komputerowych, dlatego jeden z rozdziałów został tym zagadnieniom poświęcony. Ujęcie to należy zaliczyć także do popularno-naukowych.

Książka zawiera także treści odnoszące się do ruchu wirowego płynów w niektórych maszynach i urządzeniach.

Chodzi o maszyny przepływowe i o ruch wirowy, który ma w nich miejsce. Istnieją programy komputerowe własne i tzw. komercyjne, które służą do badania przepływu w tych maszynach wraz z różnymi modelami turbulencji. Programy te odpowiadają na wiele pytań związanych z rozkładami prędkości i ciśnień. Wymaga to jednak postawienia warunków brzegowych nie tylko

na ściankach, które są oczywiste, ale także na wlocie i wylocie z kanału maszyny, które oczywiste nie są.

O ile odległości od osi maszyny są znaczne (co to oznacza, to jest w książce wyjaśnione) to można założyć rozkłady prędkości obwodowej, które są zbliżone do rozkładów potencjalnych, tzn. takich, w których elementy płynu nie wirują wokół własnych osi obrotu. Gdy natomiast kanały wlotowe lub wylotowe obejmują oś maszyny, to tego w stosunku do składowej obwodowej prędkości zrobić nie wolno.

Oprócz zagadnień związanych z maszynami są tu omówione niektóre urządzenia wykorzystywane w technice, w których mamy do czynienia z ruchem wirowym płynów. Są to urządzenia wykorzystywane we włókiennictwie do formowania przędz. Są także omówione tzw. rury Ranka, w których skutki ruchu wirowego są wyraźne, bo następuje w nich rozdział powietrza na zimne i gorące. Efekt Ranka może być wykorzystany w różnych zastosowaniach technicznych. Omówione są również wiry w komorach wtryskiwaczy cieczy jeśli to są wtryskiwacze wirowe i strumieniowo-wirowe.

Dla urządzeń technicznych stosowano program komputerowy własny i programy CFX zakładając, że przepływ jest ustalony. Model turbulencji użyty w programie komputerowym był nie bez znaczenia. Użyto przy tym zmiennych pierwotnych. Oprócz nich można też stosować tzw. metody wirowe, w których przekształca się równania podstawowe i używa funkcji wirowości oraz funkcji prądu. O metodach tych, które są dość złożone jest w książce wspomniane.

Przedostatni rozdział książki jest poświęcony temu, że ruch wirowy w tzw. rdzeniu wiru (w środku) znamienny tym, że występuje w nim prawie liniowy rozkład składowej obwodowej prędkości, jest związany z zasadą wydatkowania jak najmniejszej energii. Ta zasada jest tam przedstawiona.

Będą w tym rozdziale przedstawione także inne zasady mechaniki płynów, które są pomocne w wyznaczeniu istotnych wymiarów wiru.

Dziękuję za merytoryczną i techniczną pomoc w opracowaniu książki członkom Zakładu Mechaniki Płynów Instytutu Maszyn Przepływowych Politechniki Łódzkiej.

## 1. WSTĘP

Płyny to substancje, które mają zdolność do zmiany swych kształtów pod działaniem dowolnie małych sił zewnętrznych, byleby działały one dostatecznie długo. Płyny więc różnią się od ciał stałych tym, że one nie posiadają sztywności postaciowej, po prostu płyną - stąd ich nazwa. Wynika to z ich struktury molekularnej i małych sił wewnętrznej spójności, które w cieczach i gazach wprawdzie występują, lecz są małe w porównaniu z siłami, które występują w ciałach stałych.

Płyny dzielimy na ciecze i gazy.

Ciecze to są te płyny, które zmieniają nieznacznie swą objętość pod wpływem działania sił zewnętrznych. Mówimy, że ciecze są praktycznie nieściśliwe. Każdy, kto bawił się lekarską strzykawką napełnioną wodą mógł to stwierdzić osobiście. Ciecze wypełniają część zbiorników, równą objętości wprowadzonej cieczy, tworzą powierzchnie swobodne oraz krople pod wpływem sił napięcia powierzchniowego.

Gazy są to te płyny, które zmieniają znacznie swe objętości pod wpływem sił zewnętrznych. Są to płyny ściśliwe. Każdy, a jest takich wielu, kto bawił się lekarską strzykawką wypełnioną powietrzem, mógł to zauważyć.

Gazy wypełniają całą objętość pomieszczeń, w których się znajdują. Wypełniają, ponieważ siły spójności między cząsteczkami gazu są znikome, znacznie mniejsze niż ma to miejsce w cieczach.



Rys. 1.1. Ziemia i granica atmosfery oraz księżyc  
[www.ethlife.ethz.ch/articles/tages/klimainterview](http://www.ethlife.ethz.ch/articles/tages/klimainterview)

W przypadku atmosfery ziemskiej jej gęstość maleje wraz z wysokością nad poziom morza. Dzieje się tak dlatego, że konkurują ze sobą dwa wpływy. Energia kinetyczna cząsteczek powietrza (którą mają dzięki ogrzaniu przez słońce) oraz grawitacja ziemska. Grubości atmosfery ściśle nie można określić. Wiadomo, że atmosfera jest dość cienką warstwą, jeśli ją porównać z promieniem ziemi, który wynosi 6370 km. Około 50% atmosfery zawarte jest w warstwie o grubości 5,6 km, a 75% atmosfery znajduje się poniżej 11 km, a 99% poniżej 30 km nad poziom morza. Tak więc samoloty bojowe (odrzutowe) latają zwykle poniżej 20 km. Zadania szpiegowskie już dawno przejęły bezzałogowe satelity, których jest wiele i które informują swoich mocodawców o wszystkim co mogą „zobaczyć”, a mogą wiele, gdyż wyposażone są w doskonale przyrządy optyczne. Na rys. 1.1 i 1.2 jest pokazana grubość atmosfery w stosunku do ziemi. Gęstość atmosfery zależy od temperatury i ciśnienia. Na poziomie morza wynosi ona w normalnych warunkach  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , ale na wysokości 10 km nad ziemią wynosi  $\rho = 0,41 \text{ kg/m}^3$ . Ciśnienie atmosfery na poziomie morza jest  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , a na wysokości 10 km jest  $p = 0,26 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Rozkłady te nie są liniowe.

Zarówno ciecze, jak i gazy są lepkie, choć ta lepkość jest niewielka. Lepkość powoduje naprężenia styczne wewnątrz płynów i na styku między ścianką a płynem. Wartość lepkości płynów można znaleźć w książkach dotyczących mechaniki płynów.

Stateczny ruch płynów rzeczywistych, lepkich - zwany laminarnym (warstwowym) istnieje, choć ogranicza się do małych prędkości lub bardzo małych wymiarów liniowych. Płyny podczas ruchu bardzo szybko tracą stateczność. Zwykle mamy do czynienia z ruchem płynów, który istnieje po utracie stateczności - zwanym turbulentnym (burzliwym). Na ten rodzaj ruchu mają wpływ niestateczności, które go wywołują i inne czynniki, o których będzie jeszcze mowa w tej książce. Liczbą podobieństwa tego ruchu jest liczba Reynoldsa. Została ona określona dla rury o przekroju kołowym i jest równa:  $Re = v d / \nu$ , gdzie:  $v$  - jest średnią prędkością transportu płynu,  $d$  - jest średnicą rury, a  $\nu$  - jest lepkością kinematyczną płynu. Utrata stateczności i powstanie ruchu turbulentnego następuje przy pewnej liczbie Reynoldsa. Dla rury o przekroju kołowym jest to zwykle  $Re \approx 2300$ . Poniżej tej liczby przepływ jest laminarny. Dalej przy wzroście prędkości płynu lub wymiarów liniowych istnieje przepływ turbulentny, który jest przepływem złożonym. Jest on bardzo ważny, bo straty energii, które w nim występują są dużo większe, niż w ruchu laminarnym. Ogólnie liczba Reynoldsa jest to  $Re = v_0 l_0 / \nu$ , gdzie  $v_0, l_0$  - są wybranymi wielkościami prędkości i wymiaru liniowego.

Ruch turbulentny od dziesiątków lat stanowi nierozwiązany problem nauki i techniki. Istnieją wprawdzie coraz doskonalsze modele turbulencji, ale nie mamy modelu uniwersalnego, który obejmowałby wszystkie przypadki ruchu turbulentnego płynów. Mówimy przy tym o zmiennych pierwotnych, pochodzących z nie przekształconych równań podstawowych, tzn. o prędkościach, ciśnieniach itp. Z tymi zmiennymi będą związane modele ruchu turbulentnego, o ile

stosujemy do równań podstawowych sposób uśredniania w czasie, nazywany uśrednianiem Reynoldsa, tzn. RANS.

Może to wszystko budzić sprzeciw czytelników, którzy twierdzą, że samoloty latają, okręty (w tym podwodne) pływają i nikomu nie przeszkadza to, że nie ma ogólnego rozwiązania ruchu turbulentnego.



Rys. 1.2. Widok atmosfery ziemskiej z balonu meteorologicznego

Tak, samoloty latają, okręty pływają (a ich katastrofy nie są związane z brakiem uniwersalnego modelu turbulencji), gdyż mamy duże bazy danych eksperymentalnych, dzięki którym to latanie i pływanie jest możliwe. Nasze istniejące modele turbulencji są oparte właśnie o te dane. Najnowszym sposobem rozwiązywania przepływu turbulentnego płynu jest tzw. DNS, wymaga on jednak bardzo wydajnych komputerów i jest stosowany obecnie (rok 2006) tylko do sprawdzenia rozwiązań w prostej geometrii.

Modelowanie ruchu turbulentnego jest koniecznością w przypadku, gdy chcemy uzyskać wiarygodną informację o stratach energetycznych. Okazuje się jednak, że istniejące modele turbulencji odpowiadają w miarę poprawnie na zadane pytania o ile bazy danych eksperymentalnych są bliskie lub zgadzają się z rozpatrywanym przypadkiem. Wiemy, że przepływ turbulentny zależy nie tylko od danych materiałowych, ale w znacznym stopniu, a czasem w decydującej mierze od pulsacji prędkości i od warunków brzegowych, które w rzeczywistości nigdy nie są stacjonarne. Wiemy również, że przepływ turbulentny rozwija się wraz ze wzrostem  $Re$ , ale ten wzrost jest ograniczony. Opór przepływu w dalszym ciągu wzrostu  $Re$  nie zależy już od tej liczby, ale zależy od warunków brzegowych [16].

Ruchy wirowe, które są przedmiotem tej książki mają istotną cechę, że są dość trwałe. Są to także powszechnie występujące rodzaje ruchów płynów.

Jest znamienne, że zwiększenie prędkości kątowej w wirującym płynie jest powiązane ze znaną w mechanice zasadą zachowania momentu pędu, w różnych skalach. Każdy z nas widział w TV łyżwiarkę lub łyżwiarza, którzy wykonują piruet, czyli zwiększają swą prędkość kątową. Robią to ściągając ręce



i nogi jak najbliżej osi wirowania i w ten sposób zmniejszają swój moment bezwładności, zwiększając prędkość kątową, zachowując moment pędu (prawie stały).

W mechanice płynów ma to swój odpowiednik w postaci tzw. drugiego twierdzenia Helmholtza. Ścisłe wyprowadzenie tego twierdzenia można znaleźć w [13] i [26]. Tutaj zostanie ono przedstawione w sposób popularny.

Mamy do czynienia z ruchem wirowym płynu, tzn. takim, w którym elementy płynu wykonują ruchy obrotowe o prędkości kątowej  $\vec{\omega}$ . Linia wirową nazywamy linię pola wektorowego wirowania elementów płynu. Zbiór linii wirowych przechodzących przez zamkniętą linię, nie będącą linią wirową nazywamy rurką wirową. Przykład fragmentu rurki wirowej pokazano na rys.1.3. Oznaczmy przekroje tej rurki przez A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, których śladem na powierzchni bocznej rurki są linie: S, S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, jednokrotnie obejmujące rurkę wirową. Powierzchnie boczne oznaczymy odpowiednio przez: A<sub>b1</sub>, A<sub>b2</sub> (rys. 1.3). Moduły wektorów  $\vec{n}$  równe są jeden, a kropka we wzorze (1.1) oznacza iloczyn skalarny.

Ze znanego twierdzenia Stokesa otrzymamy:

$$\iint_{A_1} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_1 dA_1 = \iint_{A_2} \vec{\omega}_2 \cdot \vec{n}_2 dA_2 \quad (1.1)$$

Rezultat ten wynika z faktu, że strumienie wirowości przez powierzchnie boczne, które są powierzchniami wirowymi równe są zero.

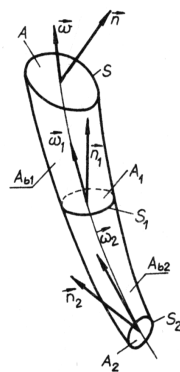
Gdy obliczamy średnią wartość rzutu wirowości  $\vec{\omega}_n$  w danym przekroju A:

$$A \bar{\omega}_n = \iint_A (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) dA,$$

można napisać:

$$\bar{\omega}_{n1} A_1 = \bar{\omega}_{n2} A_2 = const \quad (1.2)$$

Równania (1.1) i (1.2) wyrażają sformułowanie drugiego twierdzenia Helmholtza. Najprościej to pokazuje jednak równanie (1.2).



Rys. 1.3. Schemat rurki wirowej

Mówi ono, że iloczyn średniej wartości rzutu prędkości kątovej elementu płynu na kierunek prostopadły do przekroju rurki razy pole tego przekroju jest stały. Wynika z tego ważny wniosek. Taki, że wtedy gdy rurka wirowa jest zmniejszana (tzn. jej przekrój maleje), prędkość kątovej elementu płynu zawartego wewnątrz tej rurki rośnie. Zatem rozciąganie wirów prowadzi do wzrostu prędkości kątovej elementów płynu znajdujących się w rurkach wirowych.

Okazuje się, że charakterystyczna dla turbulentnego ruchu płynów jest jego struktura wirowa. Rozciąganie wirów zaś stanowi o tym, że posiadają one wysokie częstości obrotów i małe wymiary. Wiry turbulentne są znacznie mniejsze niż wiry charakterystyczne dla cyklonów tropikalnych lub tornad. Są też mniejsze od wymiarów liniowych kanałów maszyn przepływowych i wtryskiwaczy. W tej książce będziemy rozpatrywać ruchy w dużej skali, w których turbulencja istnieje i odgrywa w nich ważną rolę. Wpływ turbulencji będzie uwzględniany w programach komputerowych, jakie są stosowane do przepływów w dużej skali, przy tym stosowane będą uśrednienia typu RANS.

Do badania stateczności rozwiązań równań rządzących ruchem płynów, w tym także ruchów wirowych, przez lata stosowano liniową teorię stateczności. Do równań ruchu wprowadzono małe zaburzenia i obserwowano zachowanie się tych zaburzeń z upływem czasu. W stanie krytycznym amplituda pewnej harmonicznej rośnie wykładniczo z czasem, wzbudzają się inne formy zakłóceń, a przepływ traci stateczność. Tak powstały równania np. Orra-Sommerfelda [26].

Wraz z rozwojem matematycznej **teorii chaosu deterministycznego** zmienił się punkt widzenia na problemy stateczności, a szczególnie stosowania teorii liniowych. Okazało się bowiem, że na podstawie teorii liniowej można mniej lub bardziej dokładnie przewidzieć, gdzie lub kiedy pojawia się niestabilność, lecz nie wiadomo, co stanie się w rezultacie jej powstania. Innymi słowy nie odpowiada ona na fundamentalne pytanie: „co będzie potem?” Turbulencja to jest właśnie to zjawisko, które dzieje się po utracie stateczności. Rozwój teorii chaosu deterministycznego obudził wielkie nadzieje i oczekiwania w zakresie teoretycznego rozwiązania przepływów turbulentnych. Pojawiło się bardzo wiele prac w zakresie teoretycznego badania stabilności elementarnych przepływów laminarnych. Wydawało się początkowo, że badanie pojawienia się niestacjonarności w płynie po utracie stanu statecznego i badanie historii narastania tej niestacjonarności przy użyciu metod chaosu deterministycznego pozwolą na teoretyczne rozwiązanie problemu turbulencji. Stosowano początkowo teorię bifurkacji Hopfa-Landau'a. Teoria ta przetrwała do 1970 roku, kiedy dwaj matematycy Ruelle i Takens wykazali, że dla układów dysypatywnych, a takie są opisywane przez równania rządzące ruchem płynów, teoria bifurkacji ma bardzo ograniczony zakres. Wnioski były takie: pierwsze zmiany stanu ruchu, czyli przejścia od stanu stacjonarnego do pojedynczych oscylacji, są możliwe do opisanego przez teorię Hopfa-Landau'a, natomiast już druga zmiana stanu nie jest trwała, nawet małe zaburzenia mogą ją niszczyć. Trzecia pojawiająca się częstość już nie synchronizuje się w ogóle. W wyniku kombinacji tych pojawiających się nowych stanów powstaje tzw. dziwny atraktor. Tak więc stosowana przez wiele lat teoria Hopfa-Landau'a okazała się strukturalnie niestabilna.

Wiadomo już, że za niektóre zjawiska przepływu turbulentnego, szczególnie w początkowym stadium jego rozwoju odpowiada chaotyczna dynamika atraktora. W pełni rozwinięta turbulencja może jednak wymagać atraktorów o olbrzymiej liczbie wymiarów, tysięcy lub więcej i staje się niemożliwa do praktycznej realizacji.

**Obecnie wydaje się, że wytłumaczenie zjawisk turbulencji za pomocą teorii chaosu deterministycznego jest mało prawdopodobne** [31]. Chyba, że nastąpi w tym zakresie zdecydowany zwrot w stosunku do obecnego stanu wiedzy (rok 2007).

## 2. MODEL WIRU – JEGO WERYFIKACJA I METODY WIROWE

Do rozwiązania problemów przepływów rzeczywistych (lepkich) można rozmaicie podejść. W tej książce zostanie zaprezentowana metoda, która dla ruchu trójwymiarowego, ściśliwego opiera się o stosowanie zmiennych pierwotnych, pochodzących wprost z równań podstawowych mechaniki płynów. Są to prędkości, ciśnienia itp.

Innym podejściem jest tzw. metoda wirowa. W metodzie tej są stosowane zmienne zależne, które pochodzą z przekształconych równań podstawowych, takie jak wirowość  $\omega$  i funkcja prądu  $\psi$ .

Metodami rozwiązania równań w obydwu tych podejściach są metody numeryczne.

Ponieważ ta książka dotyczy metod, w których stosowane są zmienne pierwotne, to metodom wirowym poświęcona jest ostatnia część tego rozdziału, aby czytelnikom uzmysłwić, że choć w nazwie książki jest użyte słowo „wirowy”, to w metodach nazywanych wirowymi chodzi o inne podejście do problemu.

Na początek rozważymy pojedynczy wir, który się pojawia często, w różnych okolicznościach. Teoretyczne modele tego wiru są dwuwymiarowe, zbudowane dla cieczy nielepkiej, o stałej temperaturze. Równaniem stanu tej cieczy (w której nie zmienia się gęstość) jest  $\rho = const$ , i trzeba założyć wartość gęstości (np. dla wody to jest  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  lub dla powietrza  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ).

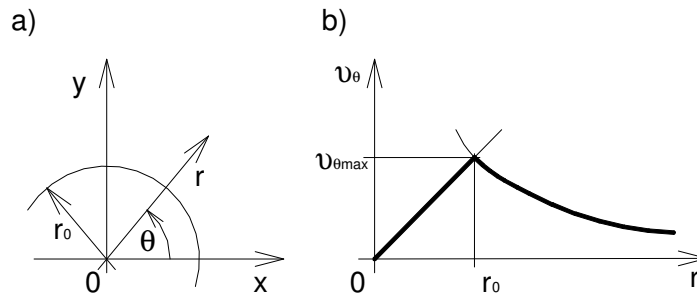
### 2.1. Teoretyczny model pojedynczego wiru

W [10] i [22] i wczesnych wydaniach [13] różnie się ten wir nazywa. Nazywa się wirem Rankina lub wirem kołowym, a w przypadku analizowania wirowych zagłębień na powierzchni wody kombinowanym wirem Rankina. W tej książce nie chodzi o nazwy tylko o sedno problemu. Zawsze zakłada się dwuwymiarowy rozkład prędkości dla modelu tego wiru. Najlepiej jest użyć biegunowego układu współrzędnych, w którym:

$$\begin{aligned}
 &v_z = 0; & v_r = 0; & v_\theta \text{ zakładamy w postaci} \\
 \text{dla } &0 \leq r \leq r_0 & v_\theta = \omega \cdot r & \\
 \text{dla } &r_0 < r < +\infty & v_\theta = \omega \cdot \frac{r_0^2}{r} & \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

gdzie:  $v_\theta$  jest składową obwodową,  $v_r$  i  $v_z$  odpowiednio - promieniową i osiową składową prędkości,  $\omega$  jest stałą (taką samą dla obu zakresów).

Na rys. 2.1 podany jest szkic wiru i rozkład jego składowej obwodowej prędkości. Rozkład ten traktujemy jako pewien model teoretyczny przepływu, dla którego muszą być spełnione powszechnie znane zasady zachowania masy, pędu i energii.



Rys. 2.1. a) szkic układu współrzędnych; b) rozkład składowej obwodowej prędkości dla wybranego  $r$

Rys. 2.1b podaje, że dla  $r \leq r_0$  rozkład prędkości jest podobny do tego jaki istnieje w naczyniu, które wiruje wraz z cieczą lub w ciele stałym, ale wynika z obserwacji eksperymentalnych ruchu wirowego płynu.

Dla  $r > r_0$  jest to oczywiście rozkład dla którego  $v_\theta \cdot r$  jest wielkością stałą. Pomimo tego, że elementy płynu mają prędkość liniową to nie wirują one wokół własnych osi obrotu. Wir ten jest nazywany wirum potencjalnym.

Dla  $r \rightarrow 0$ ;  $v_\theta$  musiałoby osiągnąć nieskończoną wartość, jeśliby rozpatrywać rozkład potencjalny, a to jest niemożliwe, dlatego nie realizuje się w rzeczywistości. W zakresie  $r \leq r_0$  wystąpiłyby wtedy duże gradienty prędkości, co przy niezerowej lepkości turbulentnej, jaka tam ma miejsce, prowadzi do wielkich naprężeń stycznych. W rzeczywistości wynika z tego „związanie” płynu zawartego w przedziale  $r \leq r_0$  i rozkład prędkości danej za pomocą pierwszej części wzoru (2.1). Jest on nazywany także rdzeniem wiru. Co to jest lepkość turbulentna i dlaczego w środku wiru jej wartość jest duża, będzie w tej książce wyjaśnione.

Wyznaczenie promienia  $r_0$  nie jest sprawą prostą. Jest ono możliwe pod warunkiem, że dysponujemy modelem tego przepływu. Rozkład prędkości pokazany na rys. 2.1b spełnia równanie ciągłości i energii. Będzie to wyjaśnione w rozdziale 10. tej książki.

Jedynym założeniem poza rozkładami prędkości, jakie przy tym wykonano, to jest założenie, że dla  $r \rightarrow \infty$  ciśnienie powinno być ciśnieniem barometrycznym  $p_a$ .

Rozkład ciśnienia obliczymy z równania zachowania pędu:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \quad (2.2)$$

Gdy podstawimy do (2.2) drugi ze wzorów (2.1), to otrzymamy

$$p(r) = -\rho \frac{\omega^2 r_0^4}{2r^2} + C$$

i wyznaczamy stałą całkowania C z warunków:

gdy  $r \rightarrow \infty$  to pierwszy wyraz dąży do zera, a ciśnienie  $p = p_a$ ,

czyli  $C = p_a$ , tzn. dla

$$r > r_0: \quad p = p_a - \rho \frac{\omega^2 r_0^4}{2r^2} \quad (2.3)$$

Gdy podstawimy do (2.2) pierwszy ze wzorów (2.1) i obliczymy stałą całkowania z warunku, że dla  $r = r_0$  ciśnienie jest takie samo dla przepływu potencjalnego i niepotencjalnego, czyli

$$p(r_0) = p_a - \rho \omega^2 r_0^2 / 2,$$

to uzyskamy

$$C = p_a - \rho \omega^2 r_0^2$$

i stąd otrzymamy dla  $r \leq r_0$ :

$$p = p_a - \rho \omega^2 r_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right) \quad (2.4)$$

Najniższe ciśnienie panuje w centrum wiru, czyli dla  $r = 0$  i ze wzoru (2.4) wynika, że jest ono równe:

$$p_{(r=0)} = p_a - \rho r_0^2 \omega^2 \quad (2.5)$$

Dla rozkładów ciśnień (2.3) i (2.4) spełnione jest równanie zachowania pędu.

### 2.1.1. Model wiru, a wyliczenie kształtu wirowych zagłębień na powierzchni płynącej wody

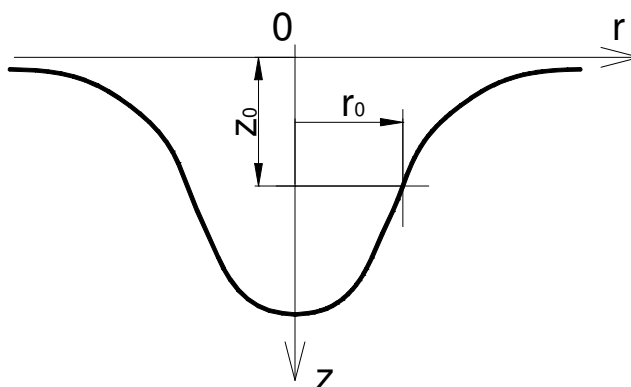
Upredzając nieco eksperyment dla tych czytelników, którzy są zainteresowani wirowymi zagłębieniami na powierzchni płynącej wody tworzącymi się za różnego rodzaju przeszkodami np. za podporami mostowymi, wyjaśniam, że można je opisać stosując poprzednio omówiony model teoretyczny. Wiry te popularnie nazywają się „lejkami na wodzie”.

Podpory mostowe są zwykle ciałami, które zaliczamy do źle oprofilowanych aerodynamicznie. Za nimi pojawiają się wiry na wodzie, które zrywają się po jednej i potem po drugiej stronie podpory i przesuwały się w dół prądu. Wiry jakie tam występują nazywa się także kombinowanymi wirami Rankina. Zakładamy, że te wiry nie oddziałują wzajemnie między sobą. Wiry oddziałujące są modelowane przez tzw. ścieżkę Karmana, [10], [22].

Woda jest dostatecznie „ciężka” (około 850 razy cięższa od powietrza), aby do rozważań wprowadzić czynnik związany z siłą grawitacji, czyli potencjałem  $g z$ , a na powierzchni wody założyć barometryczne ciśnienie  $p_a$ .

Prawdę mówiąc to zadanie jest trójwymiarowe, ale tu zakłada się rozkład prędkości  $v_r, v_z \ll v_\theta$ . Składowa  $v_\theta$  jest określona przez wzory (2.1).

Na rys. 2.2 objaśniony jest układ współrzędnych jaki jest przyjęty dla przeprowadzonych obliczeń. Układ jest związany z przesuwanymi się wirami.



Rys. 2.2. Układ współrzędnych i kształt „lejków” na wodzie

Wobec tak przyjętego układu współrzędnych piszemy dla  $r > r_0$ , gdy przepływ jest potencjalny, równanie Bernoulliego, które ma postać:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 r_0^4}{2r^2} - g z = const. \quad (2.6)$$

Równanie Bernouiego (2.6) można wyprowadzić zakładając, że gęstość  $\rho$  jest stała. Gdy  $r > r_0$  trzeba założyć, że przepływ jest potencjalny i podstawić drugi wariant rozkładu prędkości (2.1). Przyjąć trzeba także, że istotny jest ciężar wody i uwzględnić to w rozważaniach wprowadzając potencjał grawitacyjny  $g z$ .

„Const” oznacza w równaniu Bernouiego energię całkowitą, przypadającą na 1 kg płynącego czynnika, którą trzeba wyznaczyć i która powinna być stała. Dla  $z = 0$ ;  $r \rightarrow +\infty$  ciśnienie jest stałe  $p_a$  i stąd  $const = p_a / \rho$ , czyli dla  $r > r_0$  (tj. dla przepływu potencjalnego); ciśnienie jest równe:

$$p = p_a + g z \rho - \rho \frac{\omega^2 r_0^4}{2r^2}. \quad (2.7)$$

Głębokość „lejka” dla  $r > r_0$  obliczymy, gdy na całej jego powierzchni jest stałe ciśnienie barometryczne  $p = p_a$ ;

$$z = \frac{\omega^2 r_0^4}{2gr^2}. \quad (2.8)$$

Dla  $r \leq r_0$  występują dwa skalarne równania zachowania pędu, bo wprowadzono siłę ciężenia, z których obliczamy ciśnienie, tak jak to robiono dla wirówki, gdy ciecz pozostaje w stanie równowagi względnej bez poślizgu względem ścianek naczynia [16]. Użyto dwóch pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g. \quad (2.9)$$

Po całkowaniu pierwszego równania dla ciśnienia otrzymamy:

$$p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + f(z)$$

Różniczkując to równanie względem  $z$  dowiemy się, że

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$$

pochodna  $f'(z)$  jest to  $\frac{\partial p}{\partial z}$ , czyli

$$f(z) = \rho g z + C$$

a to z kolei oznacza, że ciśnienie dla  $r \leq r_0$  jest równe:

$$p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g z + C$$

Stała całkowania  $C$  jest wyliczona z warunku, że dla  $r = r_0$  ciśnienie  $p(r_0)$  musi być takie samo jak dla przepływu potencjalnego.

Wynika z tego, że  $p(r_0) = p_a + \rho g z_0 - \rho \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$ . Tu  $z_0$  to jest  $z$  dla  $r = r_0$  (patrz rys. 2.2) i stąd obliczymy stałą całkowania:

$$C = p(r_0) - \rho \frac{\omega^2 r_0^2}{2} - g \rho z_0.$$

Ostatecznie:

$$p = p_a + \rho g z - \rho \omega^2 r_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right) \quad (2.10)$$

Na powierzchni „lejka” panuje ciśnienie barometryczne  $p = p_a$  i wyliczymy, że dla  $r \leq r_0$  jego głębokość wynosi:

$$z = \frac{\omega^2 r_0^2}{g} \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right) \quad (2.11)$$

Można sprawdzić, że dla  $r = r_0$  wzory (2.8) i (2.11) dają ten sam wynik.

Największa głębokość „lejka” występuje w środku wiru dla  $r = 0$  i jest równa:

$$z_{(r=0)} = \frac{r_0^2 \omega^2}{g} \quad (2.12)$$

Problemem jest obliczenie  $r_0$ , ale to wymaga przyjęcia modelu przepływu rzeczywistego.

### 2.1.2. Wirowy sływ wody z otwartego zbiornika

Taki sływ wody ze zbiornika występuje bardzo często. Może to być np. wanna, w której jest otwór sływowy. Gdy wody jest dużo, wirowy sływ ma charakter taki jak to opisano wzorami od (2.6) do (2.12). Można zatem wyliczyć głębokość „lejka” na wodzie w miejscu jego wirowego sływu. Największa głębokość „lejka” istnieje w środku wiru (czyli środku sływu). Ważne jest, że decydującą rolę odgrywają w wirze siły odśrodkowe. Można się o tym przekonać machając ręką, po to aby zmienić kierunek wirowania wody. Wtedy, o ile wanna jest symetryczna (ale z reguły jest niesymetryczna), woda zmieni kierunek



prędkości obwodowej. Siła odśrodkowa, która jest proporcjonalna do kwadratu prędkości obwodowej będzie znów działała tak samo.

Wody w zbiorniku będzie coraz mniej, aż do momentu kiedy pojawi się tzw. rdzeń powietrzny. Prawdę mówiąc przepływ jest trójwymiarowy, ale w tym ujęciu zagadnienia zakłada się dla prostoty, że rozkład prędkości  $v_r, v_z \ll v_\theta$ , który jest określony przez wzory (2.1). Aby uprościć zadanie i pozostać tylko w rejonie sływu potencjalnego robimy założenie, że promień rdzenia powietrznego  $r_r$  jest równy promieniowi  $r_0$ , czyli  $r \geq r_0$ .

Piszemy więc równanie Bernoulliego:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_\theta^2}{2} - g z = \frac{p_a}{\rho} \quad (2.13)$$

gdyż dla  $r \rightarrow \infty$ ;  $v_\theta \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow 0$ ;  $p \rightarrow p_a$ .

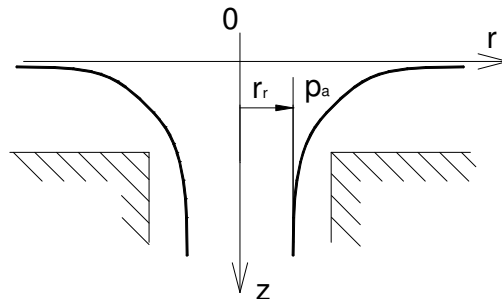
Uwzględniając to, że przepływ jest potencjalny  $v_\theta$  obliczymy ze wzoru (2.1) i piszemy ponownie:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 r_r^4}{2r^2} - g z = \frac{p_a}{\rho} \quad (2.14)$$

Ponieważ w rdzeniu powietrznym wiru o promieniu  $r_r$  panuje ciśnienie  $p_a$ , wyznaczamy kształt powierzchni swobodnej wody dla  $r \geq r_r$ :

$$z = \frac{\omega^2 r_r^4}{2gr^2} \quad (2.15)$$

co jest pokazane na rys. 2.3.



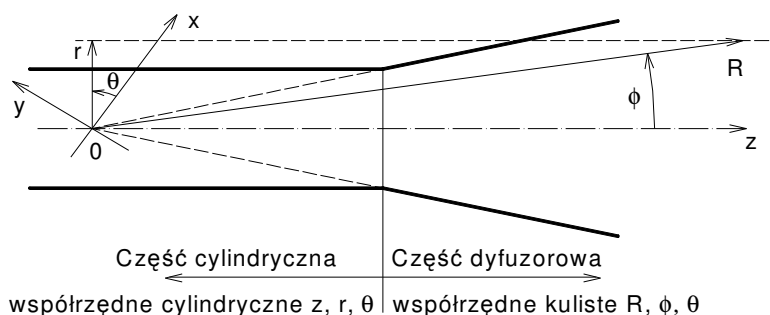
Rys. 2.3. Woda spływająca wirowo z otwartego zbiornika, gdy jest jej mało

### 2.1.3. Model teoretyczny, a wiry rzeczywiste w technice

Czy przedstawiony model teoretyczny ruchu wirowego ma coś wspólnego z rzeczywistym przepływem? To jest pytanie, na które trzeba przede wszystkim odpowiedzieć. Okazuje się, że ma wiele wspólnego. Na przykładzie cyklonów tropikalnych i tornad, będzie to wyjaśnione w dalszej kolejności, a teraz uwaga zostanie skupiona na urządzeniach technicznych.

W tym celu zostaną wykorzystane badania eksperymentalne. Przedstawiony będzie szereg rezultatów, z których wynika, że założony rozkład teoretyczny prędkości jest zbliżony do rzeczywistego: [9], [27], [35].

Przede wszystkim na osi wiru nie może występować rozkład potencjalny, bo dla  $r = 0$ ;  $v \rightarrow \infty$ , a zgodnie z równaniem Bernoulliego ciśnienie dla  $r = 0$ , dążyłoby do  $-\infty$ . Nie może to mieć miejsca. Wszystkie wymienione poniżej badania wykazują, że składowa obwodowa prędkości dla  $r = 0$  jest także zerem, tj.  $v_\theta = 0$ . Tak zwana „lepkość turbulentna” jest natomiast w środku wiru duża. Wynika to z obliczeń przeprowadzonych według programów komputerowych i modelu turbulencji  $k-\varepsilon$ . W 10. rozdziale zostanie udowodnione, że rozkład składowej obwodowej prędkości jest trwały. Jest tak, ponieważ rozkład ten wiąże się z minimalizacją energii jaka jest potrzebna do utrzymania wiru.



Rys. 2.4. Schemat dyfuzora użytego do osiągnięcia rozkładu prędkości obwodowej, pokazanej na rys. 2.5.

$x, y, z$  - kartezjański układ współrzędnych, przy tym płaszczyzna  $x, 0, y$  - jest prostopadła do rys. 2.4,  $\phi$  - kąt między promieniem  $R$ , a osią  $z$ ;  $\theta$  - kąt między osią  $x$  i promieniem  $r$ ;  $r$  - rzut promienia  $R$  na płaszczyznę  $x, 0, y$