

# Spis treści

ROZDZIAŁ 1. Wstęp.....	5
1.1. Przegląd literatury związanej z formułowaniem i rozwiązaniem problemu odwrotnego .....	9
1.2. Prosty przykład ilustrujący zalety zastosowania metody aproksymacji relacji odwrotnej – jednowymiarowe zagadnienie przewodzenia ciepła.....	14
Eksperyment numeryczny 1 – dobór SSN, jakość aproksymacji... 20	
Eksperyment numeryczny 2 – aproksymacja relacji odwrotnej.....	23
Eksperyment numeryczny 3 – jakość aproksymacji relacji odwrotnej.....	26
Eksperyment numeryczny 4 – aproksymacja relacji odwrotnej zależnej od czasu obserwacji.....	29
ROZDZIAŁ 2. Zagadnienie odwrotne.....	31
2.1. Problem wprost i odwzorowanie wprost.....	31
2.2. Problem odwrotny i odwzorowanie odwrotne.....	33
2.3. Rozwiązania zagadnienia odwrotnego przez aproksymację relacji odwrotnej.....	36
ROZDZIAŁ 3. Sztuczna sieć neuronowa jako narzędzie rozwiązania zagadnienia odwrotnego .....	38
3.1. Elementy budowy operatora neuropodobnego Podstawowe określenia.....	39
3.2. Działanie sztucznej sieci neuronowej.....	43
3.3. Sieć neuronowa jako aproksymator funkcji wielu zmiennych.....	47
3.3.1. Sformułowanie twierdzenia o aproksymacji funkcji .....	47
3.4. Metody doboru parametrów sieci.....	50
3.5. Klasyczne rozwiązanie problemu nadzorowanego uczenia sieci neuronowej warstwowej.....	54
3.6. Przegląd innych algorytmów doboru wag synaptycznych .....	58
3.7. Analiza jakości wytrenowania sieci neuronowej.....	60
3.8. Własności prawidłowo wytrenowanej i prawidłowo skonstruowanej Sztucznej Sieci Neuronowej.....	63
3.9. Numeryczna ocena jakości wytrenowania SSN dla problemu aproksymacji.....	65
3.10. Przykład ilustrujący zastosowania SSN do aproksymacji prostej zależności funkcjonalnej.....	66
3.11. Algorytm aproksymacji funkcji niejednoznacznej.....	83
3.12. Przykład zastosowania metody sztucznych wzorców weryfikujących.....	87

ROZDZIAŁ 4. Zagadnienie odwrotne związane z interpretacją impulsowych testów dynamicznych (FWD) stosowanych w mechanice nawierzchni.	92
4.1. Opis impulsowego testu dynamicznego FWD	92
4.2. Wykrywanie miejsc osłabienia podłoża za pomocą testu FWD jako rozwiązanie zagadnienia odwrotnego	95
4.3. Wykrywanie miejsc osłabienia podłoża za pomocą testu FWD – eksperyment numeryczny	100
4.4. Możliwość zastosowania SSN do oszacowania parametrów podłoża na podstawie wyników testu FWD	106
4.5. Sformułowanie zagadnienia analizy wstecznej wyników testu FWD przy użyciu SSN i metody elementów skończonych	110
4.6. Eksperyment numeryczny – zastosowanie SSN do analizy odwrotnej wyników testu FWD	113
4.7. Analiza wsteczna wyników testu FWD przy użyciu SSN i wzorów symbolicznych	118
4.8. Wnioski praktyczne	123
ROZDZIAŁ 5. Rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w ośrodku gruntowym: identyfikacja parametrów procesu	125
5.1. Równanie dyspersji, sformułowanie problemu	130
5.2. Przykłady identyfikacji parametrów wpływających na rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w ośrodku porowatym na podstawie monitoringu	135
5.2.1. Przykładowe wyniki procedury identyfikacji	136
5.3. Niezawodność procesu identyfikacji	144
5.4. Podsumowanie – identyfikacja zagrożeń dla środowiska wynikających z eksploatacji składowisk	145
ROZDZIAŁ 6. Uogólniona metoda autokoherentna w teorii homogenizacji jako problem odwrotny	148
6.1. Zagadnienie termomechaniki wiązki nadprzewodzącej	150
6.2. Metoda autokoherentna (GSCL) jako problem odwrotny	153
6.2.1. Problem „wprost”	153
6.2.2. Problem „odwrotny”	157
6.2.3. Problem odwrotny wyrażony za pomocą gradientu funkcjonału Hilla	159
6.3. Zastosowanie sztucznej sieci neuronowej do rozwiązania problemu odwrotnego	160
6.4. Studium przypadku: homogenizacja wiązki nadprzewodzącej	161
6.4.1. Rozwiązanie numeryczne problemu „wprost”	163
6.5. Wnioski dotyczące zastosowania metody odwrotnej do zagadnienia homogenizacji autokoherentnej	168
Literatura	170

# ROZDZIAŁ 1. Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie możliwości zastosowania sztucznych sieci neuronowych do rozwiązywania zagadnienia odwrotnego. Sztuczne sieci neuronowe są stosowane od wielu lat do rozwiązywania problemów związanych z identyfikacją parametrów modelu matematycznego. Omawiając przydatność sztucznych sieci neuronowych w rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich, zazwyczaj wymienia się ich znaczenie dla rozwiązywania problemu odwrotnego. Ogólniej, wiele metod obliczeniowych inspirowanych obserwacją procesów biologicznych, takich jak, na przykład, proces ewolucji gatunków, transmisja sygnałów w układzie nerwowym organizmów żywych czy zachowania rojów, które dały początek, odpowiednio, algorytmom genetycznym, sztucznych sieciom neuronowym, optymalizacji rojem cząstek – są stosowane bardzo często do rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Nie jest celem tego opracowania przedstawienie zastosowań bogatego zbioru narzędzi numerycznych inspirowanych obserwacją naturalnych procesów biologicznych do rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Przeciwnie, zamiarem autora jest przedstawienie jedynie jednego, bardzo uniwersalnego i prawdopodobnie najprostszego narzędzia obliczeniowego należącego do tej grupy metod numerycznych. Narzędziem tym są najbardziej klasyczne i chronologicznie najstarsze sieci neuronowe z warstwami ukrytymi, trenowane metodą wstecznej propagacji błędu. Sztuczne sieci neuronowe tego typu są najprostsze, najlepiej zrozumiane i najbardziej rozpowszechnione. Jednocześnie – jak to zostanie pokazane w kolejnych rozdziałach – mogą być one zastosowane w sposób niemal identyczny (z koncepcyjnego punktu widzenia) do bardzo szerokiego zakresu problemów odwrotnych. Automatyzm ten to ogromna zaleta proponowanej techniki rozwiązywania zagadnień odwrotnych. Autor wierzy, że prostota opisanej w pracy metody ułatwi rozwiązywanie problemów odwrotnych w powszechnej praktyce inżynierskiej.

Zasada rozwiązania problemu odwrotnego przedstawiona w tym opracowaniu polega na aproksymacji relacji odwrotnej za pomocą sztucznej sieci neuronowej. W rozdziale pierwszym zostanie sprecyzowany sens pojęcia „relacja odwrotna”.

Aby sformułować kilka ważnych uwag zapowiadających zawartość proponowanej pracy, na użytek tego rozdziału wstępnego, poniżej zostanie przedstawiony w sposób intuicyjny sens tego pojęcia. Przedtem jednak muszą zostać sformułowane inne terminy. Rozróżnimy najpierw „relację wprost” oraz „zagadnienie wprost”. Zwykle definicja zagadnienia „wprost” to układ równań różniczkowych cząstkowych zapisanych dla niewiadomych pól temperatury, przemieszczeń, naprężeń i innych wielkości, których rozkład przestrzenny i ewolucja w czasie są przedmiotem badań klasycznych gałęzi fizyki matematycznej, takich jak termomechanika, mechanika płynów i wielu innych. Relacją „wprost” nazwiemy zależność definiującą wartości niewiadomych dowolnego zagadnienia inżynierskiego w funkcji uogólnionych obciążeń oraz stałych fizycznych, danych materiałowych i innych parametrów koniecznych do zdefiniowania zagadnienia „wprost”. Relacja „wprost” to rozwiązanie zagadnienia „wprost”. Zauważmy, że zapisanie takiego rozwiązania lub jego wystarczająco dokładnego przybliżenia jest zwykle możliwe bez specjalnego wysiłku koncepcyjnego. Zakładamy w tej pracy, że interesują nas jedynie zagadnienia odwrotne stowarzyszone z zagadnieniami „wprost”, których rozwiązania lub algorytmy rozwiązań są znane. Oznacza to, że istnieją metody symbolicznego lub numerycznego, dokładnego lub przybliżonego rozwiązania zagadnienia wprost. Metody takie, nawet niezwykle trudne teoretycznie lub złożone numerycznie i wymagające zaawansowanych obliczeń, uważamy za dane i znane. Zagadnienie odwrotne stowarzyszone z dowolnym zagadnieniem „wprost” to zwykle zagadnienie optymalizacji z więzami, którymi są równania definiujące zagadnienie „wprost”. Zaobserwowane wartości niewiadomych rządzących problemem to stały element sformułowania zagadnienia odwrotnego. Niewiadome w zagadnieniu „wprost” to najczęściej wielkości obserwowalne, czyli takie, które można zmierzyć wykonując doświadczenie. Zagadnienie odwrotne to zwykle pytanie o uogólnione obciążenia lub parametry materiałowe (parametry definiujące operatory użyte w klasycznym sformułowaniu „wprost”), dla których można uzyskać zaobserwowane rozwiązanie tego zagadnienia. Zagadnienie odwrotne jest więc zagadnieniem minimalizacji pewnej odległości w obecności więzów, często bardzo złożonych i prowadzących do trudnych matematycznie zagadnień. Zmiennymi niezależnymi w tym zagadnieniu są uogólnione obciążenia i parametry materiałowe (parametry definiujące zagadnienie „wprost”). Jeśli istnieje rozwiązanie przedstawiające te obciążenia lub te parametry w funkcji zmiennych obserwowalnych, to rozwiązanie będziemy nazywali „relacją odwrotną” lub „zależnością odwrotną”.

W pracy przedstawimy sposób aproksymacji zależności odwrotnej za pomocą sztucznych sieci neuronowych na podstawie wystarczającej liczby przykładów jej „realizacji”. Realizacje te będą otrzymane jako rozwiązania zagadnienia „wprost”. Rozwiązania zagadnień „wprost” są dobrze znane w inżynierii. Nie będzie potrzeby formułowania zagadnienia odwrotnego, a tym bardziej – rozwiązywania skomplikowanego zagadnienia minimalizacji odległości rozwiązania od wartości tego rozwiązania pomierzonych w kilku punktach: minimalizacji w obecności więzów, którymi są równania definiujące zagadnienie „wprost” (unikniemy więc rozwiązywania zagadnienia, które jest zwykle bardzo złożone i prowadzi do niełatwych zagadnień teoretycznych). Co więcej, raz uzyskane przybliżenie relacji odwrotnej – zapisane w postaci właściwie wytrenowanej sztucznej sieci neuronowej – funkcjonuje tak, jak wzór symboliczny w klasycznej matematyce. Jest to ogromna przewaga proponowanego podejścia nad innymi algorytmami. Na przykład – zastosowanie algorytmu genetycznego zakłada wykonanie obliczeń genetycznych dla każdego zespołu danych doświadczalnych. Podobnie – każde klasyczne, najczęściej iteracyjne rozwiązanie zadania minimalizacji funkcjonału z ograniczeniami.

Przedstawiony algorytm działa inaczej: jego rezultatem jest wytrenowana sieć neuronowa, która powinna być funkcjonalnie identyczna dla wszystkich „doświadczeń” i właściwa dla danego typu zagadnienia. Oznacza to, że na przykład w zagadnieniu ustalania sztywności warstw podłoża na podstawie pomierzonych wielkości ugięć (Falling Weight Deflectometer – FWD) nawierzchni – nie będzie trzeba powtarzać obliczeń algorytmu minimalizacji z więzami. Wystarczy wprowadzić ugięcia pomierzone w kolejnym doświadczeniu na wejście sztucznej sieci neuronowej wytrenowanej dla danej klasy nawierzchni, aby odczytać na wyjściu sieci niewiadome sztywności warstw. Poniżej wymienimy zasadnicze zalety proponowanej metody. Będą one ilustrowane przykładami zawartymi w dalszych rozdziałach tej pracy.

- Procedura jest niemal automatyczna, nie wymaga kreatywnego myślenia, stosuje się do szerokiej gamy zagadnień.
- Formalne sformułowanie zadania odwrotnego w klasycznej postaci zagadnienia minimalizacji z ograniczeniami (lub jakiegokolwiek innej klasycznej postaci, na przykład z wykorzystaniem prawdopodobieństwa warunkowego), nie jest konieczne.
- Narzędzia numerycznego znalezienia rozwiązania problemu odwrotnego ograniczają się do tych, jakie są używane przy rozwiązywaniu

odpowiedniego, wyjściowego zagadnienia „wprost”, a więc są z reguły dobrze znane.

- Dodatkowym, choć podstawowym w tej metodzie, narzędziem numerycznym są sztuczne sieci neuronowe używane w roli aproksymatorów numerycznych. Aby je zastosować, można użyć jednego z wielu komercyjnych programów komputerowych, które są łatwo dostępne, proste i tanie.
- Problemy związane z prawidłowością sformułowania zagadnienia odwrotnego (istnienie rozwiązania i jego jednoznaczność) łatwo analizować, obserwując i interpretując przebieg i wyniki treningu sztucznej sieci neuronowej.

Metoda rozwiązania zagadnienia odwrotnego za pomocą relacji odwrotnej ma również istotne wady i ograniczenia. Najważniejszym ograniczeniem metody jest to, że stosuje się ona tylko do przypadków, w których relacja odwrotna jest funkcją bijekcyjną. Jedynie wtedy aproksymacja za pomocą sieci neuronowych istnieje. Przypadek niejednoznaczności odwzorowania odwrotnego jest równoznaczny z brakiem jednoznaczności również w ewentualnym sformułowaniu klasycznym. Wobec tego, aby rozwiązać ten problem należy zwykle zmienić technikę obserwacji. Pomierzyć należy zmienne obserwowalne w innych punktach lub/i zmienić liczbę obserwowanych punktów. W tej pracy ograniczenia metody związane z niejednoznacznością nie będą w sposób istotny dotyczyły głównych zagadnień inżynierskich, które ją egzemplifikują. W tych zastosowaniach, które zostaną zaproponowane jako możliwe kierunki wdrożeń inżynierskich, zwykle nie ma kłopotu z jednoznacznością rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Pomimo tego, w pracy zostaną również wskazane kierunki rozwiązania problemu niejednoznaczności rozwiązania właściwe dla proponowanej metody, to znaczy dla użycia sieci neuronowych do aproksymacji relacji odwrotnej.

Przedstawione w opracowaniu metody odwrotne mają lub mogą mieć wiele ważnych zastosowań gospodarczych związanych, na przykład, z wykrywaniem i charakterystyką źródeł zanieczyszczeń oraz z opisem właściwości ośrodka, w którym mogą się one rozchodzić. Dotyczy to przede wszystkim opisu funkcjonowania i monitoringu środowiska sąsiadującego ze składowiskami odpadów, zagrożonego odciekami lub emisją gazów. Składowiska odpadów są (w kontekście tej pracy) przedmiotem analizy w dwóch podstawowych aspektach: jako instalacje i jednocześnie obiekty budowlane, które muszą spełniać określone prawem wymagania dotyczące budowy, funkcjonowania, zamykania oraz eksploatacyjnego i poeksploatacyjnego monitoringu.